Föreläsning 2

29 September 2020 17:10

En $(\underline{m} \times \underline{n})$-matris

$$A = (a_{i,j}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

tal/siffror $a_{i,j}$ $\quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$

Summa notation;

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \sum_{i=3}^{7} a_i = \sum_{i=1}^{5} a_{i+2}.$$

Matrismultiplikation.

Låt $A = (a_{i,j})$ vara en $(m \times p)$-matris,

och $B = (b_{i,j})$ vara en $(p \times n)$-matris.

Definiera vi $(m \times n)$-matris $\quad \underset{(m\times \cancel{p})(\cancel{p}\times n)}{A \cdot B} = (c_{i,j})$,

där

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \qquad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{bmatrix}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2 \times 4)\text{-matris}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ - & \cdot \end{bmatrix} \qquad (4 \times 2)\text{-matris}$$

$$\begin{vmatrix} - & \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+3+8 & -1+2+3+4 \\ 0+0-1+0 & 0+1-1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1} \quad (\text{identitetsmatrisen})$$

Kan också kolla att $BA = \mathbb{1}$.

Med andra ord så är $B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$.

Ex Lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -40x + 16y + 9z = 1 \\ 13x - 5y - 3z = 2 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x - 5y - 3z = 2 \\ 5x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Vi har matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40x + 16y + 9z \\ 13x - 5y - 3z \\ 5x - 2y - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 4 + 9 \\ 2 + 10 + 9 \\ 1 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Lösning är

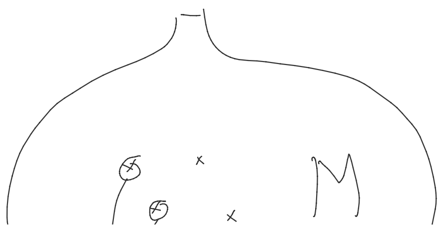
$x = 14, \; y = 21, \; z = 25.$

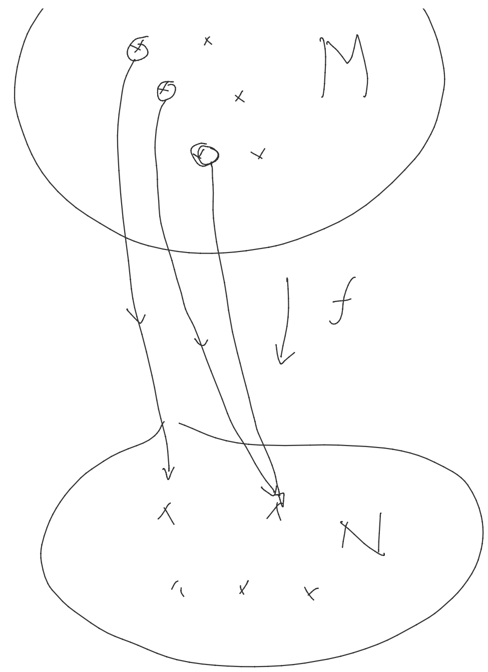
Avbildningar.

$$f : M \longrightarrow N$$

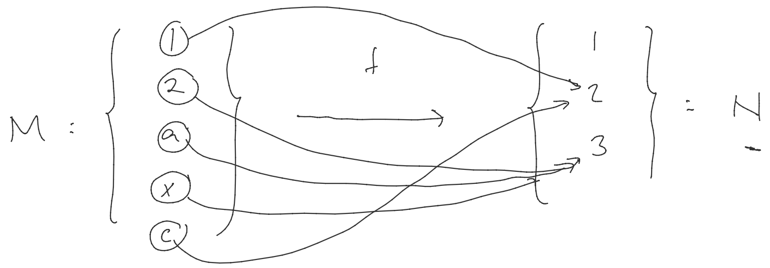
mängd

En mängd :





Ex.



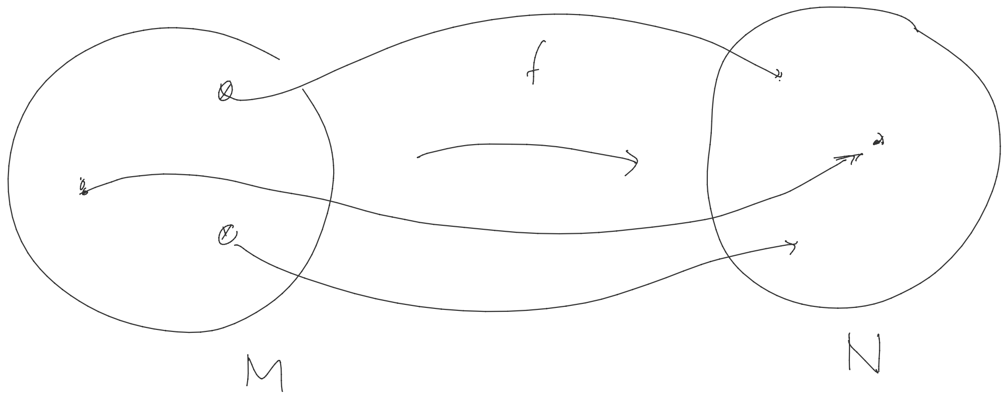
Låt $f: \underline{M} \longrightarrow N$. vara en avbildning.

a) f är <u>injektiv</u> om $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

b) f är <u>surjektiv</u> om y i N är $f(x) = y$
något x i M.

c) f är bijektiv om injektiv och surjektiv.

Ex



f bijektiv ger identifikation av M med N.

Ex. $M = \{ n > 0 , \text{ heltal} \} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

$N = \{ \text{jämna heltal} > 0 \} = \{ 2, 4, 6, \dots \}$

Mängderna är lika stora, vi har bijektionen

$$f : M \longrightarrow N$$
$$x \longmapsto 2x = f(x)$$

- Injektiv: $f(x) = f(y)$, $2x = 2y \Rightarrow x = y$.
- Surjektiv y i N, $y = 2 \cdot x$ något x.

$y = f(x)$.

Ex/Uppgift

$M = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$N_1 = \mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$

$N_2 = \mathbb{Q} = \text{rationella tal} = \{ \frac{m}{n}, m, n \text{ heltal}, n \neq 0 \}$.

a) Visa att $\mathbb{N}$ är lika med $\mathbb{Z}$

b) Visa att $\mathbb{N}$ är lika med $\mathbb{Q}$.