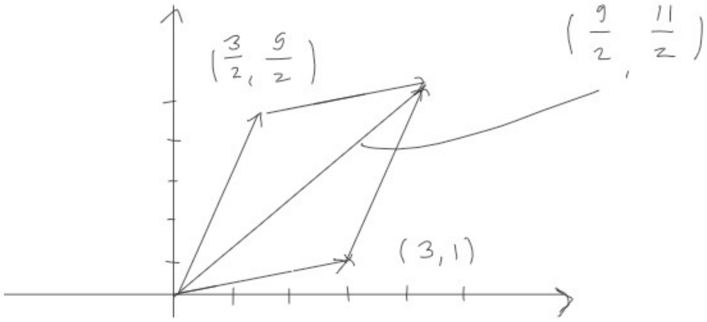
Föreläsning 3

13 October 2020 16:03

$\mathbb{R}^2$ är mängden av alla ordnade par av reella tal,

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x \text{ och } y \text{ reella tal} \}$$



Avbildningar $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som kommer från matriser och matrismultiplikation:

Låt $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, ger avbildningen

$$T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_A(x,y) = (ax + cy, bx + dy)$$

$$(x,y) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} \longleftrightarrow (ax+cy, bx+dy)$$

Ex.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $T_A(x,y) = (2x - y, 4x + 3y)$

En avbildning $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ är <u>linjär</u> om

$$T(x,y) = x \cdot T(1,0) + y\,T(0,1).$$

Notation $(1,0) = e_1$, $(0,1) = e_2$

Notation $(1,0) = e_1$, $(0,1) = e_2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Om A är en (2×2)-matris,

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \cdot \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

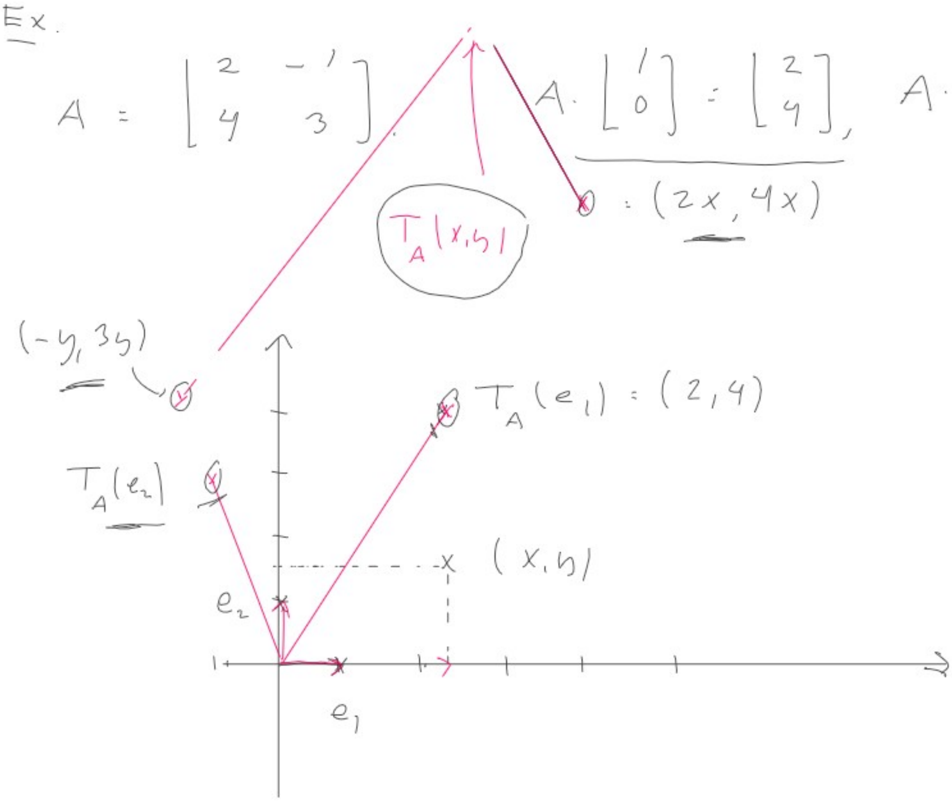
$$= A \cdot \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \cdot \left(y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= x \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$T_A(x,y) = x \cdot T_A(1,0) + y \cdot T_A(0,1).$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



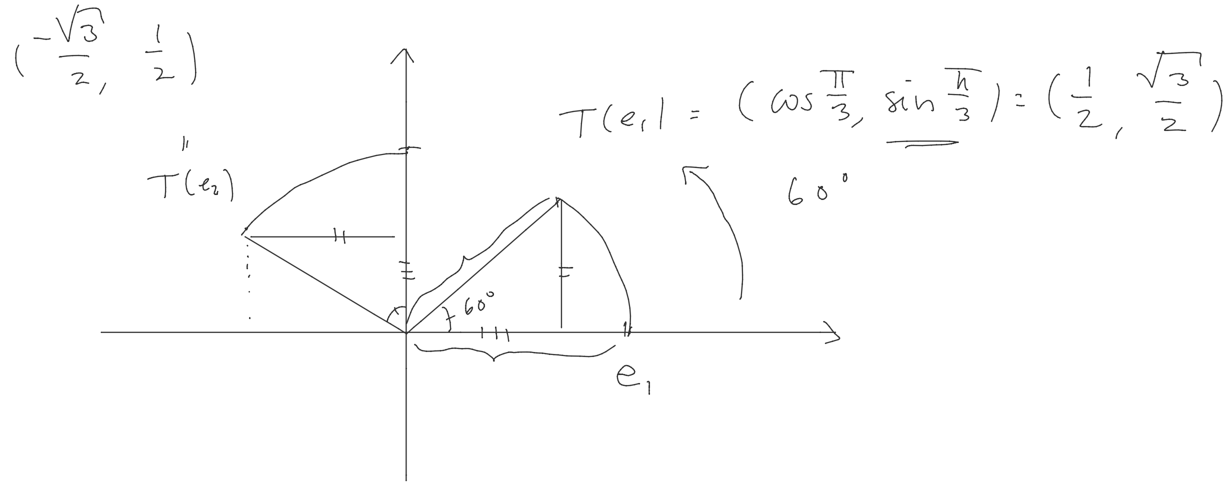
$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

SATS. Låt $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linjär. Då ges T av en matris A och matrismultiplikation,

$$A = [\,T(e_1) \quad T(e_2)\,]$$

$$\left(T(x,y) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

<u>Ex.</u> $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ är rotation med $\pi/3$ radianer ($60°$) omkring $(0,0)$, moturs. Denna avbildning är linjär.



Vilken matris A pratar vi om?

$$A = [\,T(e_1) \quad T(e_2)\,]$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Speciellt har vi att punkten $(3,4)$ roteras till punkten

$$A \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 - 2\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \end{bmatrix}$$

Allmänt så ges rotation med θ radianer av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

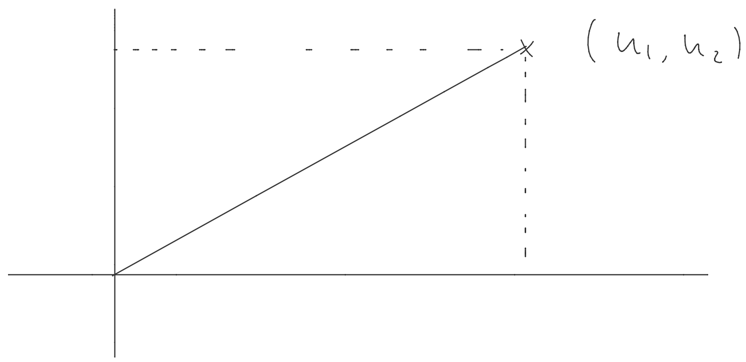
<u>Inreprodukten</u> av två vektorer $u = (u_1, u_2)$ och $v = (v_1, v_2)$ är talet

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 .$$

Noterar att $\langle u, u \rangle = u_1^2 + u_2^2 \geq 0$,

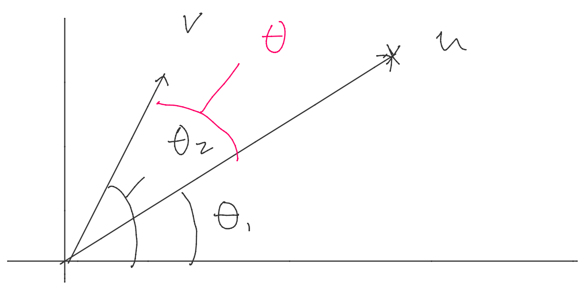
Definiera <u>normen</u> till en vektor u som

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} .$$



Geometrisk tolkning av inreprodukt.

$$u = (u_1, u_2)$$
$$= (\|u\| \cos\theta_1, \|u\| \sin\theta_1)$$



$$v = (v_1, v_2)$$
$$= (\|v\| \cos\theta_2, \|v\| \sin\theta_2)$$

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \|u\| \|v\| \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\underline{\langle u,v\rangle} = \|u\|\|v\| \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \|u\|\|v\| \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

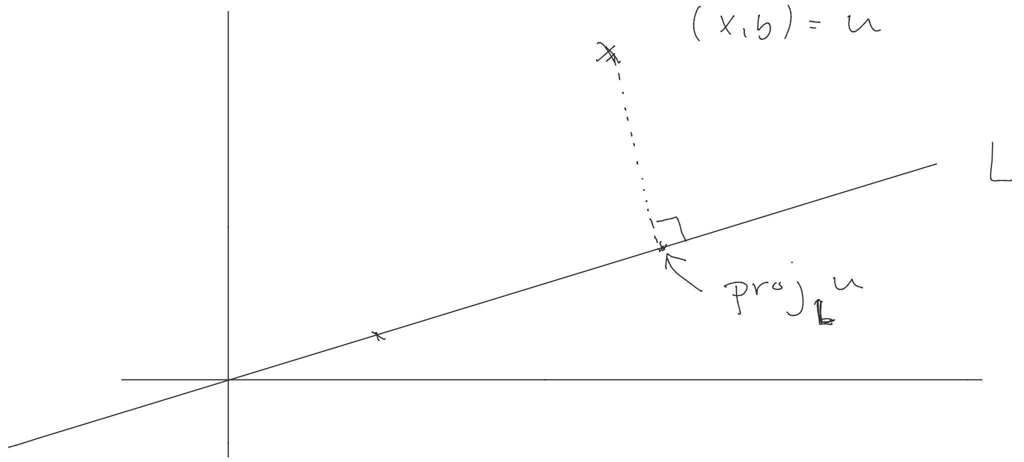
$$= \|u\|\|v\| \big(\underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2}_{\cos(\theta_2-\theta_1)} \big)$$

$$= \|u\|\|v\| \cos\theta \quad , \quad \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$\langle u,v\rangle = 0$ när vektorerna (pilarna) är vinkelräta.

<u>Definition</u> Två vektorer u och v är ortogonala (vinkelräta) om $\langle u,v\rangle = 0$.

Projektion



Ta en vektor $v \neq (0,0)$, $\underline{L} = \{t \cdot v\}$ godtyckliga tal t.

<u>SATS.</u> Låt $v \neq (0,0)$, $L = \{tv\}$. u en godtycklig vektor. Vi har att

$$\text{proj}_L u = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$