Linjär algebra - fö 4

Från förra föreläsningen:

·) Inre produkten (skalärprodukten) mellan två vektorer $u = (u_1, u_2)$ och $v = (v_1, v_2)$ definieras som talet

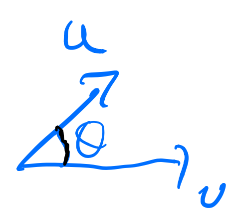
$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 .$$

Vektorerna u och v kallas ortogonala (vinkelräta) om $\langle u, v\rangle = 0$.

·) Vi såg även den geometriska tolkningen:

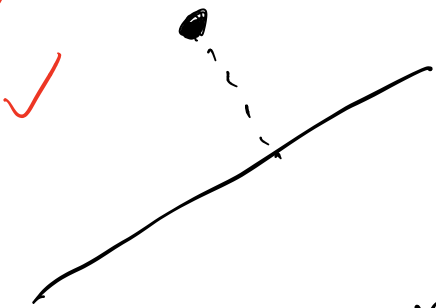
$$(*) \qquad \langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta ,$$

där $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ är normen (längden) av u och θ är den minsta vinkeln mellan u och v.



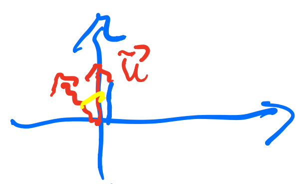
Hur kan vi använda detta?

- vinkelbestämning. ✓
- Avståndsbestämning. ✓



Exempel: Bestäm vinkeln mellan vektorerna $u=(0,1)$ och $v=\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lösning: principskiss:



Skalärprodukten mellan u och v är dels

$$\langle u,v\rangle = \left\langle (0,1),\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle = 0\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

och dels

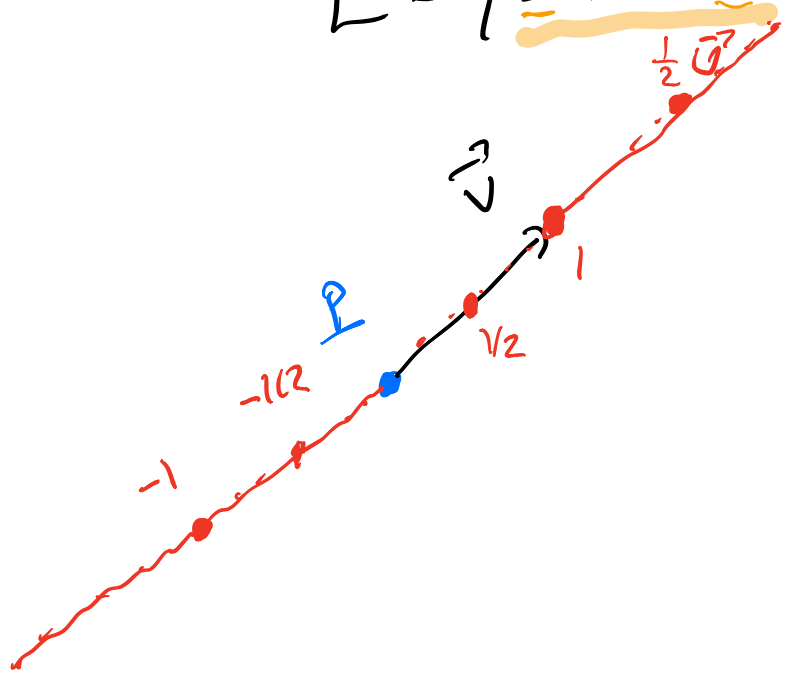
$$\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\theta = \sqrt{0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\cos\theta = 1\cdot 1\cdot\cos\theta = \cos\theta.$$

Alltså: $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, så $\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

Linier i planet

Definition. Låt $P = (p_1, p_2)$ vara en punkt i planet och låt $\vec{v} = (a, b)$ vara en nollskild vektor. Linjen L, genom P med riktningsvektor $\vec{v}$ definieras som mängden

$$L = \{ P + t \cdot \vec{v} \mid t \text{ är reellt} \}.$$



Vi kan även representera en linje i ett koordinatsystem på

Parameterform

$$L = \{ P + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (P_1, P_2) + t(a, b) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (\underbrace{P_1 + t \cdot a}_{x}, \underbrace{P_2 + t \cdot b}_{y}) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

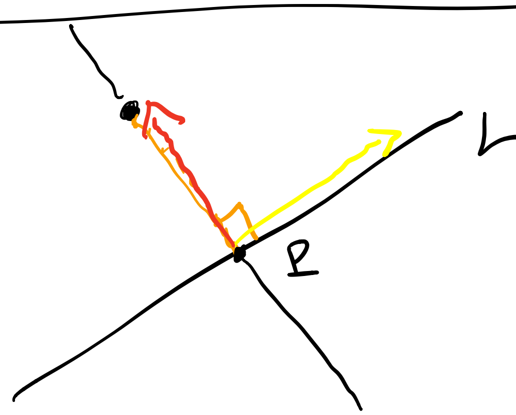
$$\begin{cases} x = P_1 + t \cdot a \\ y = P_2 + t \cdot b, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$ ← Parameterform.

eller skriva den på affin form

$$ax + by + c = 0.$$

a, b inte noll samtidigt.

$(y = kx + m)$

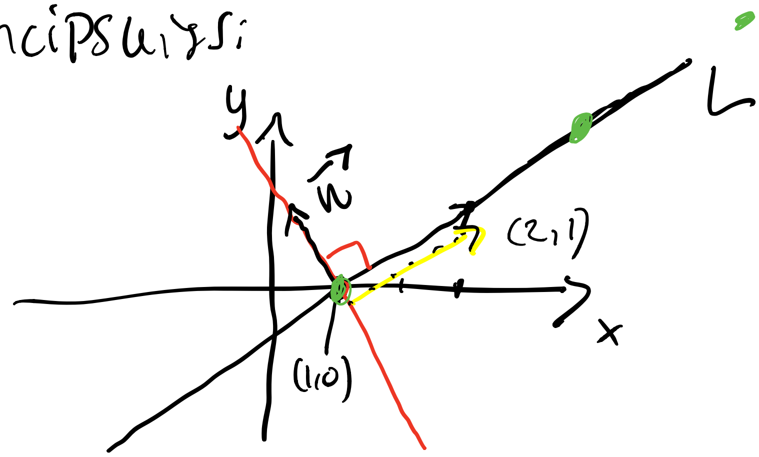


Givet en linje L kan vi konstruera en linje som är ortogonal (vinkelrät) mot L genom att hitta en vektor som är ortogonal mot L:s riktningsvektor. Linjen ortogonal mot L kallas för normallinjen och motsvarande riktningsvektor kallas normalvektor, $\vec{n}$.

$$N = \{ P + t \cdot \vec{n} \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Exempel: Låt $\mathcal{L}$ vara linjen som ges av mängden $\{(1,0) + t\cdot(2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Finn linjen genom punkten $(1,0)$ som är ortogonal mot $\mathcal{L}$.

Lösning: Principskiss:



Linjen L har riktningsvektor $v = (2,1)$. En vektor som är vinkelrät mot $(2,1)$ är $\vec{n} = (-1,2)$ ty

$$\langle (2,1), (-1,2) \rangle = 2(-1) + 1 \cdot 2 = 0.$$

Så,

$$N = \{ (1,0) + t \cdot (-1,2) \mid t \text{ är reellt} \}.$$

$$= \{ (\underbrace{1-t}_{x}, \underbrace{0+2t}_{y}) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Så,
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$$

vi har $2 \cdot x + y = 2 \cdot (1-t) + 2t = 2.$

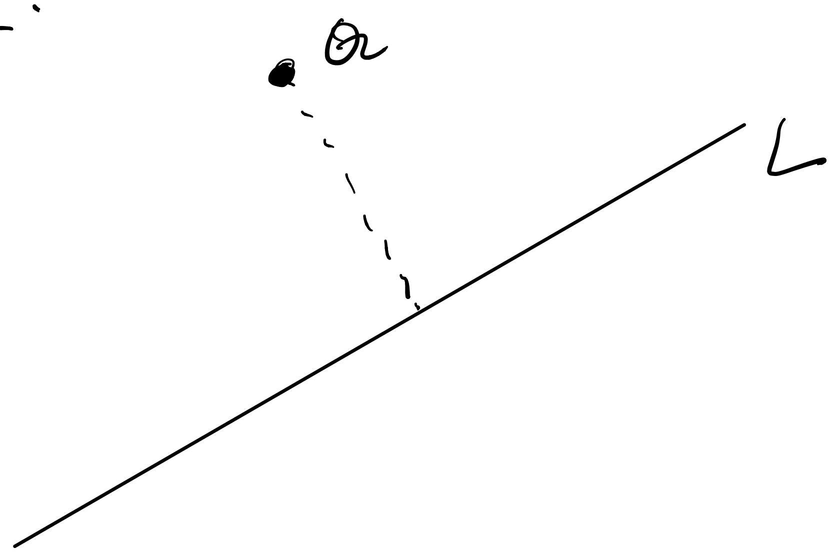
$\therefore \quad 2x + y = 2.$

Lemma. Låt L vara linjen $L = \{P + t \cdot v \mid t \in \mathbb{R}\}$ och låt $\vec{n} = (a, b)$ vara en nollskild normalvektor till L. En ekvation för L är

$$ax + by + c = 0.$$

Bevis. Finns i kompendiet.

Avstånd mellan en punkt och en linje.



SATS. Låt L vara linjen som ges på formen $ax + by + c = 0$. Låt $Q = (q_1, q_2)$ vara en godtycklig punkt i planet. Avståndet, d, mellan Q och L ges av formeln

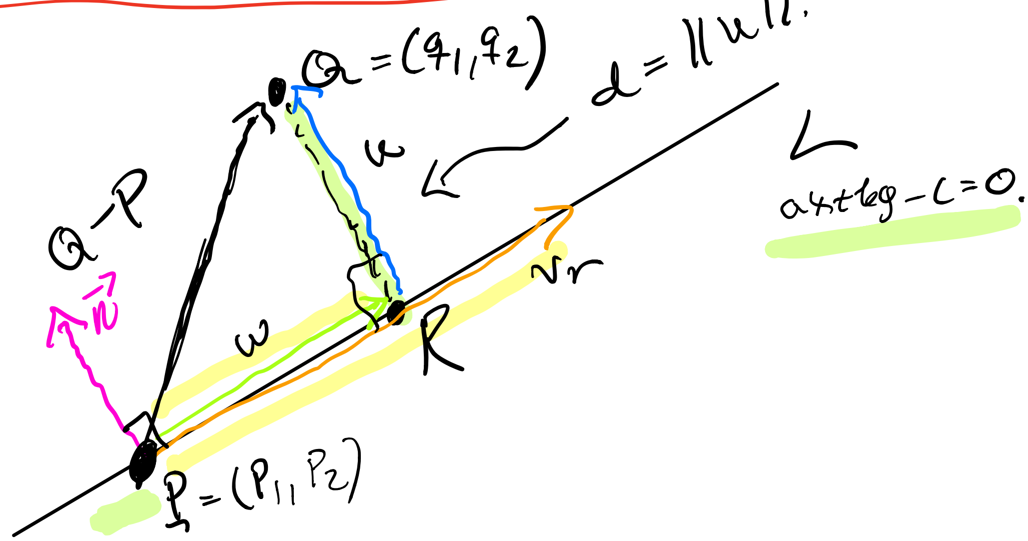
$$d = \frac{|a \cdot q_1 + b \cdot q_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exempel: Bestäm avståndet mellan linjen $2x + 3y - 2 = 0$ och punkten $(5, 4)$.

Lösning: Eftersom $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$ $q_1 = 5$, $q_2 = 4$. så är

$$d = \frac{|2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \underline{\underline{\frac{20}{\sqrt{13}}}}.$$

Bevis av avståndsformel.:



Då har vi att $Q - P = w + u$.
Vi vet att w är parallell med L:s riktningsvektor, v_r. Det innebär att $w = t \cdot v_r$, för något $t \in \mathbb{R}$. Eftersom u och $\vec{n}$ är parallella finns det något tal s så att $u = s \cdot \vec{n}$. Vad säger vi? Jo, avståndet

$$d = \|u\| = \|s \cdot n\|.$$

Observera att

$$\langle Q-P, n\rangle = \langle w+u, n\rangle$$

$$= \langle t\cdot v_r + s\cdot n, n\rangle$$

$$= \langle t\cdot v_r, n\rangle + \langle s\cdot n, n\rangle$$

$$= t\cdot \underbrace{\langle v_r, n\rangle}_{=0 \text{ tg } \perp} + s\langle n, n\rangle$$

Räknereglerna Lemma 4.1.6.

$$= t\cdot 0 + s\cdot\langle n, n\rangle$$

$$= s\cdot\langle n, n\rangle$$

kom ihåg att $\|n\| = \sqrt{\langle n, n\rangle}$.

$$= s\cdot\left(\sqrt{\langle n, n\rangle}\right)^2$$

$$= s\cdot\|n\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{\|n\|^2}\langle Q-P, n\rangle.$$

Notera att $\vec{n} = (a, b)$ och

$$d = \|s\cdot\vec{n}\| = \|s(a,b)\|$$

$$= \sqrt{\langle s(a,b), s(a,b)\rangle} = \sqrt{\langle (sa, sb), (sa, sb)\rangle}$$

$$= \sqrt{(sa)^2 + (sb)^2}$$

$$= \sqrt{s^2(a^2+b^2)}$$

$$= \sqrt{s^2}\sqrt{a^2+b^2} = |s|\sqrt{a^2+b^2}$$

$$= |s| \cdot \|n\|.$$

Använder vi att $s = \frac{1}{\|n\|^2}\langle Q-P, n\rangle$ fås

$$d = \left|\frac{1}{\|n\|^2}\langle Q-P, n\rangle\right| \cdot \|n\|$$

$$= \frac{|\langle Q-P, n\rangle|}{\|n\|^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\|n\|}$$

$$= \frac{|\langle Q-P, n\rangle|}{\|n\|}$$

$$= \frac{|\langle (q_1, q_2) - (p_1, p_2), n\rangle|}{\|n\|}$$

$$= \frac{|\langle (q_1, q_2), n \rangle - \langle (p_1, p_2), n \rangle|}{\|n\|}$$

$$= \frac{|\langle (q_1, q_2), (a, b) \rangle - \langle (p_1, p_2), (a, b) \rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|q_1 a + q_2 b - (a p_1 + b p_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Observera att $P \in L$ så de måste p uppfylla linjens ekvation

$$ax + by + c = 0$$

$$a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad a \cdot p_1 + b \cdot p_2 = -c.$$

Alltså:

$$d = \frac{|q_1 a + q_2 b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Q.E.D.