Linjär algebra för gymnasister, Fö 6

Förra gången:

Determinanten: Jo, om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

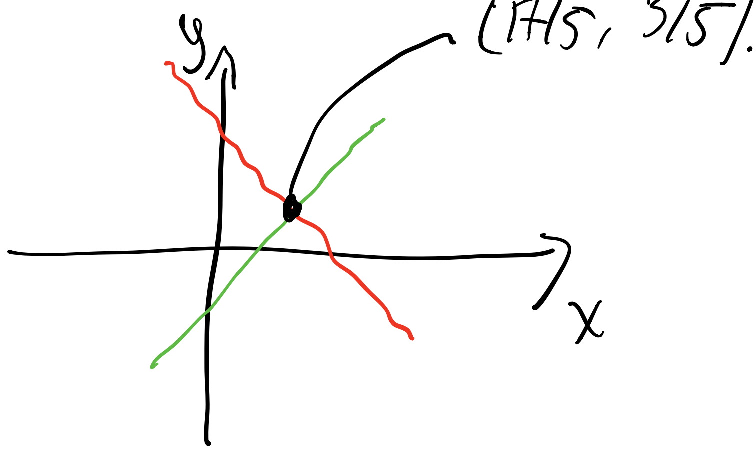
då är $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - b \cdot c$.

Singulär matris: A kallas singulär om $\det A = 0$.

I början av gymnasiet lärde vi oss lösa några ekvationssystem, t. ex. $(x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{17}{5}\right)$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 17/5 \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

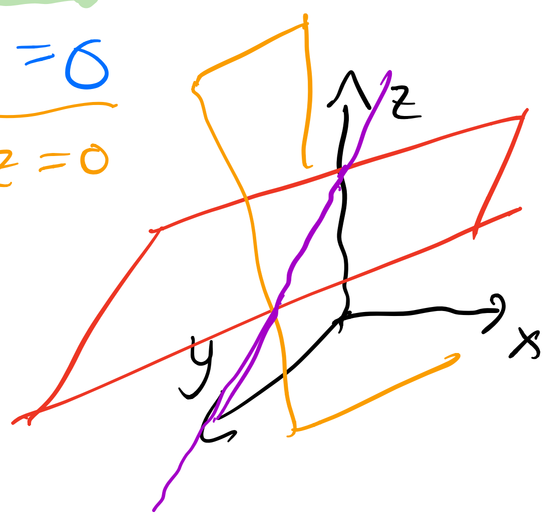
Geometriska betydelsen:



Mål för idag: Lära oss lösa "större" ekvationssystem, t. ex.

$$\begin{cases} \overset{a_{11}}{2}x - \overset{a_{12}}{y} + z = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$x + 2y + 0z = 0$



Definition: Ett allmänt linjärt ekvationssystem skrivs som följande

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

där systemet sägs ha m rader och n variabler.

Observation: Vi kan uttrycka detta med hjälp av matriser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\underline{x} = b}$$

Med lösningsmängden till ett givet linjärt ekvationssystem menas alla ordnade n-tupler av reella tal $(t_1, \ldots, t_n)$ som uppfyller ekvationssystemet.

Exempel:

$$\boxed{\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y = 0 \end{cases}} \iff \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2(-2y) - y + z = 3 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5y + z = 3 \\ x = -2y \end{cases}$$

Vi inför en parameter:

Låt $y = t$, där $t \in \mathbb{R}$. Då är $x = -2t$, och $z = 3 + 5y$
$= 3 + 5t$.

Alltså:

$$\boxed{\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 3 + 5t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

oändligt många.

$(x, y, z) = (-2t, t, 3+5t)$. $\triangle$

Hur löser man allmäna linjära ekvationssystem?

Det finns systematiska metoder för att lösa linjära ekvationssystem. Vi sammanfattar några tillåtna operationer i följande sats:

<u>SATS</u>: Ett linjärt ekvationssystem har samma lösningsmängd

- vid radbyte!
- Multiplikation med ett nollskilt tal
- Addition av en rad till

en annan.

Bevis: Övning, eller kolla upp.

Exempel: Betrakta ekvationssystem

$$-2 \quad \begin{cases} x+3y+z=2 \\ 2x+7y=2 \\ -x-4y+3z=1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x-6y-2z=-4 \\ 2x+7y=2 \\ -x-4y+3z=1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \quad \begin{cases} x+3y+z=2 \\ 0+y-2z=-2 \\ -x-4y+3z=1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ y - 2z = -2 \\ -y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ y - 2z = -2 \\ 2z = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ y - 2z = -2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Då $z = 1/2$ så är $y = -2 + 2z = -1$

och $x = 2 - 3y - z = 2 + 3 - \frac{1}{2}$

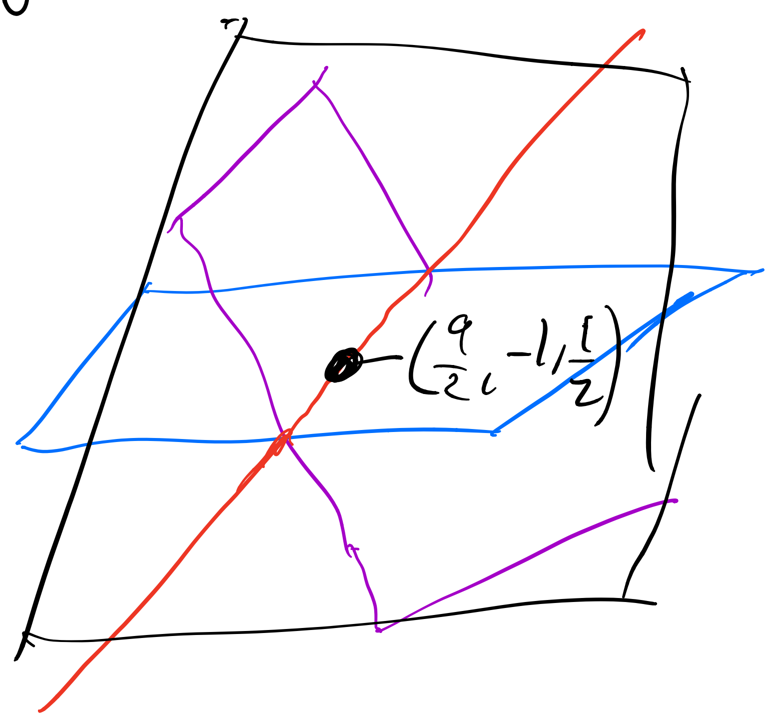
$= 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

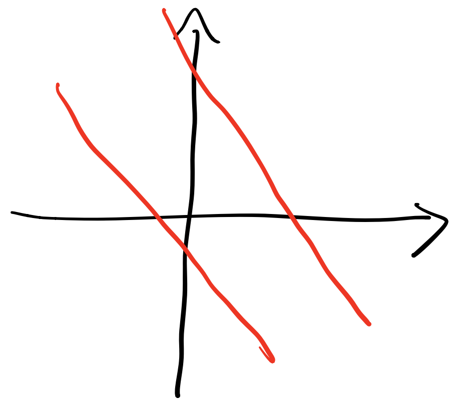
Svar: $(x,y,z) = \left(\frac{9}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$.

dvs. precis en

Entydig lösning

Anmärkning: Ett linjärt ekvationssystem har antingen en entydig lösning, oändligt många lösningar eller ingen lösning.





Gauss-Jordanelimination

En utförlig beskrivning av algoritmen finns i kompendiet. Vi illustrerar hur man gör med exempel:

Exempel: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Lösning: Vi för över ekvationssystemet på matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Nu Gauss-Jordaneliminerar vi

$$\begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} (-2) \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ (-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (3) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

vi vill det ska

steg 1 klar

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ \left(\frac{1}{4}\right) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} & & z \end{array} \end{array} . \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 . \end{cases}$$

Kontrollera lösningen!

Exempel: Lös systemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + z = 3 \\ x \;{\scriptstyle +0\cdot y}\; - z = 2 \end{cases}$$

Lösning: Gauss-Jordanelimination

Med för

$$\begin{array}{cc} -1 & -1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \; -1 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Noll rad !

Vad betyder detta? Observera vad ovanstående betyder.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ \quad\;\; y + 2z = 1 \end{array}\right.$$

Så, låt $z = t$, $y = 1-2t$

och $x = 2+t$, $t \in \mathbb{R}$.

kontrollera lösninsen genom

återsubstitution i orsinalsystemet!