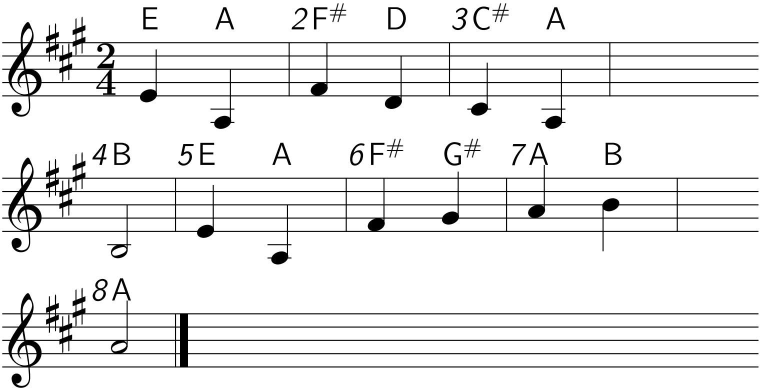
www.math-stockholm.se/cirkel

8 oktober 2020

Hej!

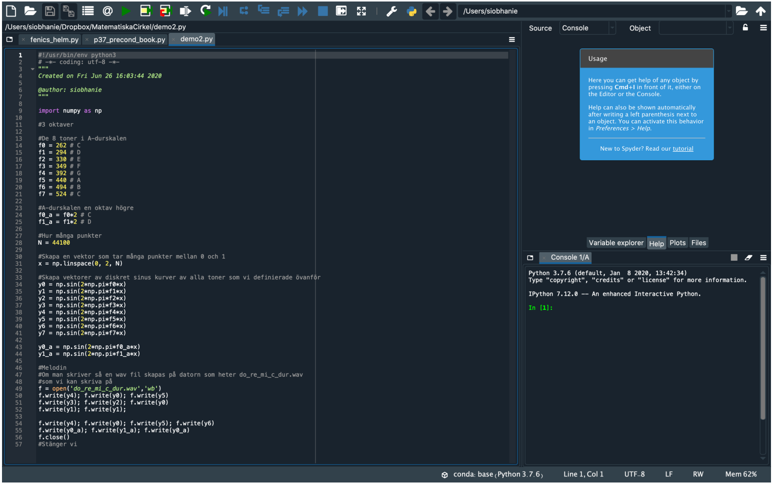
- Siobhán (Sha-von) Correnty
- Matteintresserad
  - Lärare
  - Master i matematik
  - Doktorand i tillämpad matematik
- Musikintresserad
  - Spelar i Stockholms Blåsorkester
  - Lär mig spela gitarr på kvällarna

Målet (1)

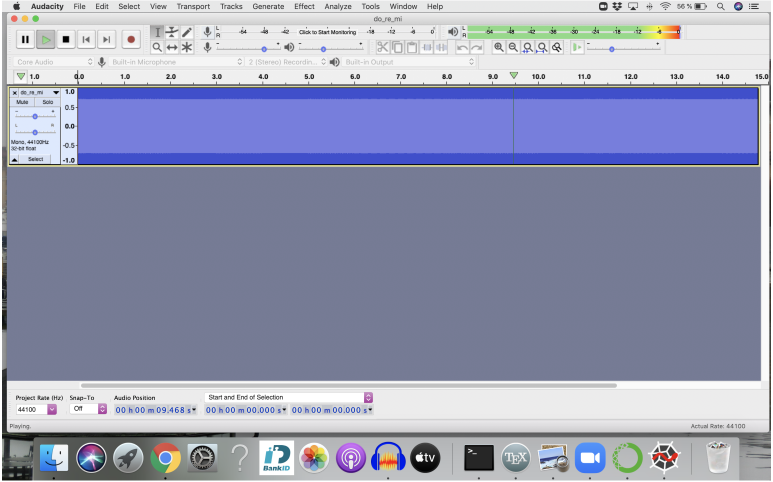


Obs: Det är okej om ni inte kan läsa noter!

Målet (2)

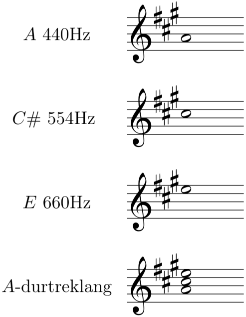

/Users/siobhanie
/Users/siobhanie/Dropbox/MatematiskaCirkel/demo2.py
fenics_helm.py
p37_precond_book.py
demo2.py
#!/usr/bin/env python3
-*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Fri Jun 26 16:03:44 2020
@author: siobhanie
"""
import numpy as np
#3 oktaver
#De 8 toner i A-durskalen
f0 = 262 # C
f1 = 294 # D
f2 = 330 # E
f3 = 349 # F
f4 = 392 # G
f5 = 440 # A
f6 = 494 # B
f7 = 524 # C
#A-durskalen en oktav högre
f0_a = f0*2 # C
f1_a = f1*2 # D
#Hur många punkter
N = 44100
#Skapa en vektor som tar många punkter mellan 0 och 1
x = np.linspace(0, 2, N)
#Skapa vektorer av diskret sinus kurver av alla toner som vi definierade övanför
y0 = np.sin(2*np.pi*f0*x)
y1 = np.sin(2*np.pi*f1*x)
y2 = np.sin(2*np.pi*f2*x)
y3 = np.sin(2*np.pi*f3*x)
y4 = np.sin(2*np.pi*f4*x)
y5 = np.sin(2*np.pi*f5*x)
y6 = np.sin(2*np.pi*f6*x)
y7 = np.sin(2*np.pi*f7*x)
y0_a = np.sin(2*np.pi*f0_a*x)
y1_a = np.sin(2*np.pi*f1_a*x)
#Melodin
#Om man skriver så en wav fil skapas på datorn som heter do_re_mi_c_dur.wav
#som vi kan skriva på
f = open('do_re_mi_c_dur.wav','wb')
f.write(y4); f.write(y0); f.write(y5)
f.write(y3); f.write(y2); f.write(y0)
f.write(y1); f.write(y1);
f.write(y4); f.write(y0); f.write(y5); f.write(y6)
f.write(y0_a); f.write(y1_a); f.write(y0_a)
f.close()
#Stänger vi
Source
Console
Object
Usage
Here you can get help of any object by pressing Cmd+I in front of it, either on the Editor or the Console.
Help can also be shown automatically after writing a left parenthesis next to an object. You can activate this behavior in Preferences > Help.
New to Spyder? Read our tutorial
Variable explorer
Help
Plots
Files
Console 1/A
Python 3.7.6 (default, Jan 8 2020, 13:42:34)
Type "copyright", "credits" or "license" for more information.
IPython 7.12.0 -- An enhanced Interactive Python.
In [1]:
conda: base (Python 3.7.6)
Line 1, Col 1
UTF-8
LF
RW
Mem 62%

Målet (3)

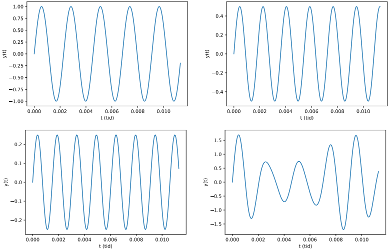

Audacity File Edit Select View Transport Tracks Generate Effect Analyze Tools Window Help
do_re_mi
Click to Start Monitoring
Core Audio
Built-in Microphone
2 (Stereo) Recordin...
Built-in Output
Mute
Solo
Mono, 44100Hz
32-bit float
Select
Project Rate (Hz)
44100
Snap-To
Off
Audio Position
00 h 00 m 09.468 s
Start and End of Selection
00 h 00 m 00.000 s
00 h 00 m 00.000 s
Playing.
Actual Rate: 44100

Målet (4)

A-durtreklang: Noter

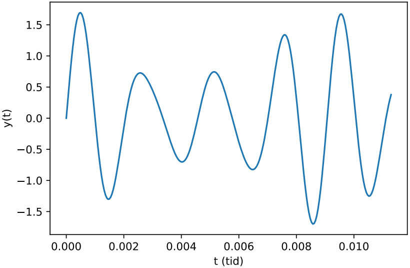


A-durtreklang: Sinus sinuskurvor

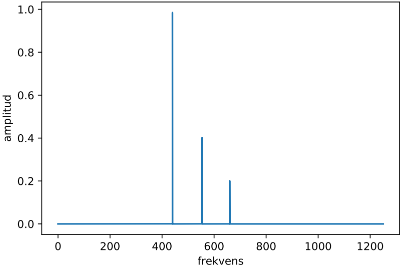


Målet (5)

Tidsdomän:
Vilka toner spelas??



Frekvensdomän:
Lätt att se vilka



Målet (6)

För att förstå behöver vi lära oss:

- Linjär algebra
- Musikteori
- Att skriva kod

Målet (6)

För att förstå behöver vi lära oss:

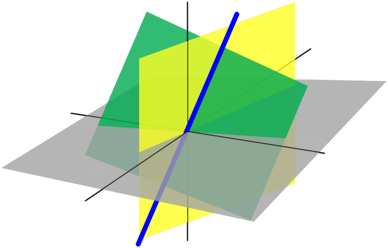
- Linjär algebra
- Musikteori
- Att skriva kod

Idag:

- Första lektionen i linjär algebra

Linjär algebra

- Grundläggande kurs i matematik
- Universitet: fördjupa er kunskap i linjär algebra
- Idag: begrepp från linjär algebra som vi behöver till projektet



Figur: Linjer och plan (Wikipedia)

Att lära sig matematik

Obs:

Vi måste gå igenom många definitioner

Att lära sig matematik

Obs:

Vi måste gå igenom många definitioner

Exempel:

Gör det abstrakta mer konkret

Matris

Definition

En *matris* A av typ $m \times n$ ges av

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

där a_{ij} är tal.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ har m rader och n kolumner

Talen a_{ij} kallas för matrisens *element*

Transponat

Definition (Transponat)

Transponatet av en matris $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ges av

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Transponatet av A betecknas A^T

A^T har n rader och m kolumner

Addition

Definition (Addition)

Addition av två matriser A och B är möjlig då A och B är av samma dimension, och beräknas genom att addera elementen parvis. Det betecknas $A + B$.

Addition

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 3-2 & -1+1 \\ 4+1 & -5-2 & 2+5 \\ 0 & 1+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Dimension

Obs! Reella tal, $\mathbb{R}^{n\times n}$

Subtraktion

Definition (Subtraktion)

Subtraktion av två matriser A och B är möjlig då A och B är av samma dimension, och beräknas genom att subtrahera elementen parvis. Det betecknas $A - B$.

Multiplikation

Definition (Multiplikation)

Multiplikation av två matriser A och B är möjlig då A är av typ $m \times n$ och B är av typ $n \times p$. Då är

$$A \cdot B = C = (c_{ij})_{m \times p}$$

där $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ och $j = 1, 2, \ldots, p$.

Multiplikation

Exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (2) + 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (3) \\ 4 \cdot (2) - 5 \cdot (-1) + 2 \cdot (3) \\ 0 \cdot (2) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 19 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Multiplikation

Obs!

$AB \neq BA$

(Bara ibland!)

Linjärt ekvationssystem

Definition

Ett *linjärt ekvationssystem* med m ekvationer och n obekanta variabler $(x_1, \ldots, x_n)$ har formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

där a_{ij} och b_k är komplexa tal.

Komplexa tal $\mathbb{C}$: $a + ib$ där a och b är reella tal

Linjärt ekvationssystem

Definition

Ett *linjärt ekvationssystem* med m ekvationer och n obekanta variabler $(x_1, \ldots, x_n)$ har formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

där a_{ij} och b_k är komplexa tal.

Vi kan skriva det som $Ax = b$, där $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ och $b = [b_1, \ldots, b_m]^T \in \mathbb{C}^m$.

Linjärt ekvationssystem

Exempel

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi har:

$Ax = b$

Matrisform

Definition (Matrisform)

Det linjära ekvationssystemet vi hade innan kan skrivas om som

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Detta kallas för *matrisformen* av ett linjärt ekvationssystem.

Lösningar till ett ekvationssystem

Antingen har ekvationssystemet:

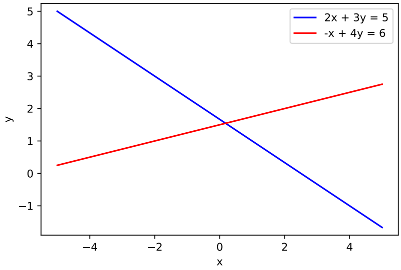
- en unik lösning
- inga lösningar
- oändligt många lösningar

En unik lösning

Exempel

Tänk på det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 5 \\ -x + 4y & = 6 \end{cases}$$



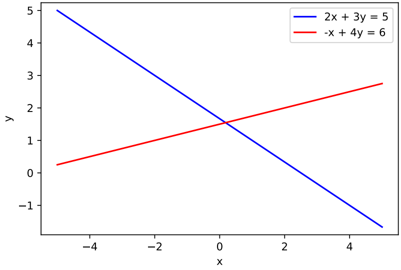
Figur: En unik lösning

En unik lösning

Exempel

Tänk på det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 5 \\ -x + 4y & = 6 \end{cases}$$



Figur: En unik lösning

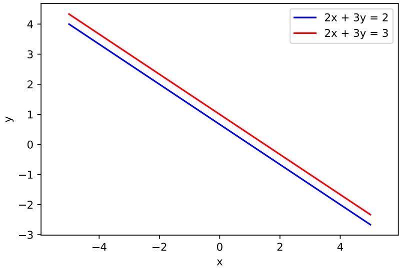
Linjerna skär varandra i en punkt.

Inga lösningar

Exempel

Tänk på det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 2 \\ 2x + 3y & = 3 \end{cases}$$



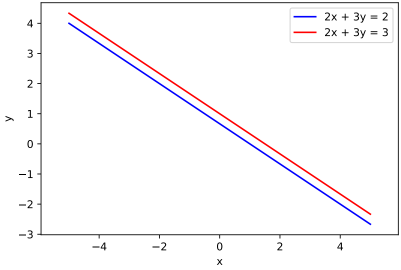
Figur: Inga lösningar

Inga lösningar

Exempel

Tänk på det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 2 \\ 2x + 3y &= 3 \end{cases}$$



Figur: Inga lösningar

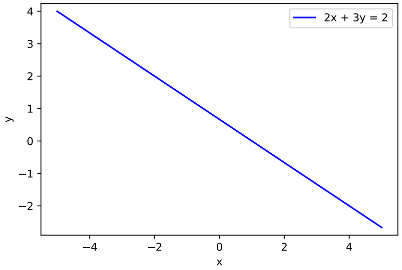
Vi har inga lösningar eftersom linjerna skär aldrig varandra.

Oändligt många lösningar

Exempel

Tänk på det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 2 \\ 4x + 6y &= 4 \end{cases}$$



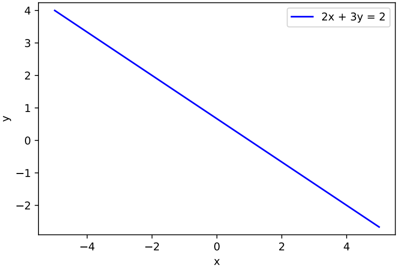
Figur: Oändligt många lösningar

Oändligt många lösningar

Exempel

Tänk på det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 3y &= 2 \\ 4x + 6y &= 4 \end{cases}$$



Figur: Oändligt många lösningar

Oändligt många lösningar: d.v.s. linjen $2x + 3y = 2$.

Hur ska vi lösa systemet?

Exempel

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = 3 \end{cases}$$

Först: Skriv om i matrisform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Metoden: *Gausselimination*

Mål:

Matris med ettor i diagonalen (övre vänstra hörnet till nedre högre hörnet) och nollor under

Vi kan:

- Byta plats på två rader
- Multiplicera en rad med ett tal som inte är lika med noll
- Addera en rad till en annan

Att lösa systemet med Gausselimination

Mål:

Matris med ettor i diagonalen (övre vänstra hörnet till nedre högre hörnet) och nollor under

Vi har:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Byt plats på den första raden (R1) och den tredje raden (R3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Att lösa systemet med Gausselimination

Vi har:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Vi gör:

$$\xrightarrow[\ ]{\substack{\mathrm{R2+R1\to R2} \\ \mathrm{R3-2\,R1\to R3}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & -6 \end{array}\right)$$

Vi har:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & -6 \end{array}\right)$$

Vi gör:

$$\xrightarrow{7\,\text{R2}+\text{R3}\to\text{R3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow[-\,\text{R2}\to\text{R2}]{\frac{1}{18}\,\text{R3}\to\text{R3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Mål:

Matris med ettor i diagonalen (övre vänstra hörnet till nedre högre hörnet) och nollor under

Skriv om med x_1, x_2 och x_3:

Vi får:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 0x_1 + x_2 - 4x_3 &= -6 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 2 \end{cases}$$

Lösningen till det linjära ekvationssystemet är alltså $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 2$.

Kolla om svaret är rätt:

Ta matrisen och multiplicera med lösningen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1) + 3(2) - 4(2) \\ 1(1) - 2(2) + 3(2) \\ -1(1) + 1(2) + 1(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Så:

Vi har $Ax = b$

Enhetsmatrisen

Definition (Enhetsmatrisen)

Enhetsmatrisen eller *identitetsmatrisen* av storleken n är $n \times n$-matrisen som har ettor längs huvuddiagonalen och nollor överallt annars, alltså

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Enhetsmatrisen

Definition (Enhetsmatrisen)

Enhetsmatrisen eller *identitetsmatrisen* av storleken n är $n \times n$-matrisen som har ettor längs huvuddiagonalen och nollor överallt annars, alltså

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Obs!

$AI = IA = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $Ix = x \in \mathbb{R}^n$

Inverterbarhet och invers

Definition (Inverterbarhet och invers)

En matris A är *inverterbar* om det existerar en matris B så att $AB = BA = I$, där I är enhetsmatrisen. Matrisen B kallas *inversen* till A och skrivs A^{-1}.

Obs!

- Ska läsa mycket om hur man beräknar inversen på högskolan
- I den här kursen kommer: fokus på hur man använder dem

Inverterbarhet och invers

Definition (Inverterbarhet och invers)

En matris A är *inverterbar* om det existerar en matris B så att $AB = BA = I$, där I är enhetsmatrisen. Matrisen B kallas *inversen* till A och skrivs A^{-1}.

Exempel

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara en matris, $x \in \mathbb{R}^n$ en vektor med variabler och $b \in \mathbb{R}^n$ ett högerled. Med hjälp av definitionen kan vi skriva om ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$:

$$Ax = b \iff A^{-1}Ax = A^{-1}b \iff Ix = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b.$$

Exempel

Vi tar matrisen A och vektorn b från innan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \;\; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 4 & 10 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \text{ (testa själv!)}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 4 & 10 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$