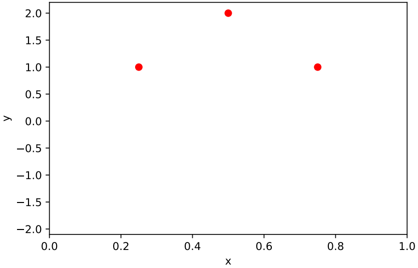
www.math-stockholm.se/cirkel

10 dec 2020

Vad är interpolation?

Vi har 3 olika punkter:

- $(0.25, 1)$
- $(0.50, 2)$
- $(0.75, 1)$

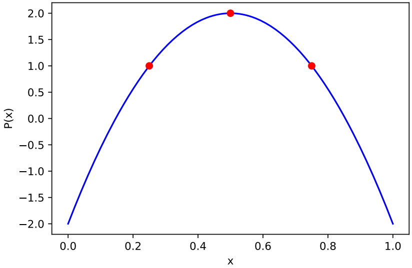


Figur: Tre punkter

Vad är interpolation? (2)

Vi vill rita en kurva som går igenom dem

- $(0.25, 1)$
- $(0.50, 2)$
- $(0.75, 1)$



Figur: Polynomet $P(x) = -2 + 16x - 16x^2$

Idag:

Vi ska:

- Bevisa att:
  - Om vi tar 3 punkter
    - har vi ett unikt polynom av grad 2 som går igenom våra punkter
  - Om vi tar $n+1$ punkter
    - har vi ett unikt polynom av grad n som går igenom våra punkter
- Gå igenom 2 metoder för att beräkna polynomet
- Interpolation med trigonometrisk basfunktioner
- Diskutera för- och nackdelar med metoderna

Exempel 4.1.1

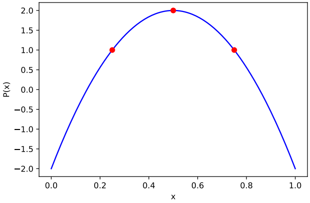
Plan:

- Börjar med ett exempel
    - Visa er vad man måste göra
    - Ganska konkret
- Beviset kommer därefter
    - Mer abstrakt

Exempel 4.1.1

3 punkter:

$$(x_1, f_1) = (0.25, 1)$$
$$(x_2, f_2) = (0.50, 2)$$
$$(x_3, f_3) = (0.75, 1)$$



Vi börjar med följande ansats:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) \\ &= c_0 + c_1(x - 0.25) + c_2(x - 0.25)(x - 0.50) \end{aligned}$$

- Obs! Andragradspolynom
- Vi måste beräkna c_0, c_1, c_2 (okända koefficienterna)

Exempel 4.1.1

Vi behöver beräkna c_0, c_1, c_2:

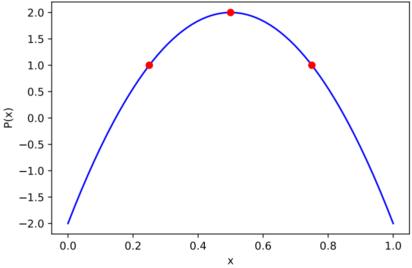
$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - 0.25) + c_2(x - 0.25)(x - 0.50)$$

Vi behöver:

$$P_2(.25) = 1, P_2(.50) = 2, P_2(.75) = 1$$

Tre punkter:

(.25,1)
(.50,2)
(.75,1)



Vad ska vi göra?

Vi behöver beräkna c_0, c_1, c_2:

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x - 0.25) + c_2(x - 0.25)(x - 0.50)$$

(3 okända variabler)

Vi behöver:

$$P_2(.25) = 1, P_2(.50) = 2, P_2(.75) = 1$$

(3 ekvationer)

Tänk!

Vad ska vi göra?

På vita tavlan

Vita tavlan

- Beräkna c_0, c_1, c_2
- Gå igenom Exempel 4.1.3
- Finns också i kompendium

Teori

Sats

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ *vara godtyckliga reella tal som är skilda från varandra. Om* $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ *är godtyckliga reella tal finns det ett unikt bestämt polynom* P *av grad högst* n *så att*

$$P(x_i) = f_i, i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Bevis (intro.)

Intro.

- Induktionsbevis är viktiga!
- Hur många har sett innan?

Bevis (struktur)

Bevisa att polynomet **existerar**

- Visa att påståendet gäller för det första talet
  - Steg 1
- Anta att påståendet gäller för $n = k - 1$
  - Steg 2
- Visa att om påståendet gäller för $n = k - 1$, så gäller det även för $n = k$
  - Steg 3, Steg 4, Steg 5

Bevisa att polynomet är **unikt**

Steg 6

Bevis

Steg 1

Först: visa att det går för $n = 1$

För $n = 1$, måste vi hitta ett polynom av grad 1 som interpolerar $P_1(x_1) = f_1$ och $P_1(x_2) = f_2$. Vi kan ta:

$$P_1(x) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$P_1(x_1) = f_1$ och $P_1(x_2) = f_2$.

Steg 2

Antag att det går för $n = k - 1$

Antag att $P_{k-1}(x)$ är ett polynom av grad högst $k - 1$ så att

$$P_{k-1}(x_i) = f_i$$

för $i = 1, 2, \ldots, k$.

Steg 3

Vi ska nu visa att det finns ett polynom P_k av grad $\leqslant k$ som går genom punkterna (x_i, f_i) för $i = 1, \ldots, k+1$.

Prova:

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k),$$

där c är en ännu okänd konstant.

Steg 4

Polynomet $P_k(x)$ är av grad högst k. Vi har också:

$$\begin{aligned} P_k(x_i) &= P_{k-1}(x_i) + c(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_k) \\ &= P_{k-1}(x_i) + 0 \\ &= f_i, \end{aligned}$$

för $i = 1, 2, \ldots, k$ från antagandet.

Steg 5

Sätta $P_k(x_{k+1}) = f_{k+1}$ och lösa ut vad c ska vara.

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= P_k(x_{k+1}) \\ &= P_{k-1}(x_{k+1}) + c(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \cdots (x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

$$\implies c = \frac{f_{k+1} - P_{k-1}(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_1) \cdots (x_{k+1} - x_k)}$$

Steg 6

Visa att P är unikt bestämt.

Antar att P och Q är olika polynom, båda av grad högst n och sådana att

$$P(x_i) = f_i, Q(x_i) = f_i, i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Men om vi har så, då är $P - Q$ ett polynom av grad $\leqslant n$ med $n+1$ olika nollställen $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Faktorteoremet[a] medför att ett sådant polynom är identiskt noll, d.v.s. $P = Q$.

[a]Om du inte känner till faktorteoremet, försök att komma på ett polynom av grad n som har $n+1$ nollställen och inte är identiskt noll.

Basfunktioner (intro)

Tänk först på ett polynom, t.e.

$$p(x) = 1 + 2x - 3x^2.$$

Kan skriva basfunktioner (de som inte är koefficienterna) som en vektor:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Vi har:

$$p(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Basfunktioner

Lite mer abstrakt...

Nu, har vi ett polynom

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

och basfunktioner (monom) ges av vektorn X s.t.

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Basfunktioner

Ännu mer abstrakt...

Låt $\omega = e^{-i2\pi/n}$. Istället för monom ska vi använda följande basvektor.

$$X = \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^{-1} \\ \omega^{-2} \\ \vdots \\ \omega^{-(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{-i2\pi/n})^0 \\ (e^{-i2\pi/n})^{-1} \\ (e^{-i2\pi/n})^{-2} \\ \vdots \\ (e^{-i2\pi/n})^{-(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0 \\ e^{i2\pi/n} \\ e^{i4\pi/n} \\ \vdots \\ e^{i2(n-1)\pi/n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Basfunktioner

Ännu mer abstrakt (2)

Eftersom $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ kan vi skriva om X:

$$X = \begin{pmatrix} e^0 \\ e^{i2\pi/n} \\ e^{i4\pi/n} \\ \vdots \\ e^{i2(n-1)\pi/n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n) \\ \cos(4\pi/n) + i\sin(4\pi/n) \\ \vdots \\ \cos(2(n-1)\pi/n) + i\sin(2(n-1)\pi/n) \end{pmatrix}$$

X är nu en vektor som består av **trigonometriska funktioner**.

Det som kommer är lite...

Figur: ?????

Nytt mål

Beräkna y_j, $j = 0, \dots, n-1$, där $\omega = e^{-i2\pi/n}$, x_i kända för $i = 0, \dots, n-1$ och

$$y_0 + y_1\omega^{-j} + y_2\omega^{-2j} + \dots + y_{n-1}\omega^{-j(n-1)} = x_j.$$

Skriva om! * * * VIKTIG * * *

$x \in \mathbb{R}^n$ och $X = \begin{pmatrix} e^0 & e^{i2\pi/n} & e^{i4\pi/n} & \dots & e^{i2(n-1)\pi/n} \end{pmatrix}^T$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ X^0 & X^1 & X^2 & \dots & X^{n-1} \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Fråga: Vilken metod kan vi använda?

Exempel 4.2.3

Låt $\omega = e^{-i2\pi/n}$. Vi definierar den följande:

$$B_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & w^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdots & \omega^{-(n-1)} \\ \omega^0 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdots & \omega^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \cdots & \omega^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

och skriva om $(*)$ som . . .

$$B_n y = x.$$

Målet:

Vi vill beräkna vektorn y.

Exempel 4.2.3

MEN!

$$F_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{(n-1)} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{(n-1)} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

är så att

$$F_n := B_n^{-1} = \overline{B}_n$$

...och F_n är lätt att beräkna! (Kan ni förklara varför?)

Exempel 4.2.3

Varning!

- Vi har $F_n = B_n^{-1} = \overline{B}_n$
- Det är inte alltid så lätt att beräkna inversen!
- (Vanligtvis är det ganska jobbigt...)
  - Högskolan
  - Inte i denna kurs

Kommer ni ihåg?

Från föreläsning om linjär algebra...

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
&\iff \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
&\iff \\
Ix &= A^{-1}b \\
&\iff \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

Exempel 4.2.3

Men då har vi också:

$$
\begin{aligned}
B_n y &= x \\
&\iff \\
B_n^{-1} B_n y &= B_n^{-1} x \\
&\iff \\
Iy &= B_n^{-1} x \\
&\iff \\
y &= F_n x
\end{aligned}
$$

Exempel 4.2.3

Nej men vänta!!

- Vi behöver bara multiplicera!
- Det är 'billigare'
  - Betyder: färre beräkningar
  - Precis samma svar

Vi säger:

- Att lösa ekvationssystem med Gausselimination kostar $\mathcal{O}(n^3)$
- Att multiplicera en matris med en vektor kostar bara $\mathcal{O}(n^2)$

Exempel 4.2.3

Vi har då: $y = F_n x$, dvs

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \dots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \dots & \omega^{(n-1)} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{(n-1)} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

...som är vad vi ville ha :)

Lite mer teori...

Sats

Om $n > 1$ så gäller att

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0,$$

där $\omega = e^{-i2\pi/n}$.

Bevis

$$\begin{aligned}(1-\omega)(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}) &= 1 - \omega^n \\ &= 1 - (e^{i2\pi/n})^n \\ &= 1 - (e^{i2\pi}) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$