4.1

$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2)$

x_i	f_i
0.2	1
0.3	-1
0.4	2

$\Big\}$ 3 punkter

$p_2(x)$ är andragradspolynom

Vi tar:

$p_2(x) = c_0 + c_1(x - .2) + c_2(x - .2)(x - .3)$

$p_2(.2) = c_0 = 1 \quad \Rightarrow c_0 = 1$

$p_2(.3) = c_0 + c_1 \cdot (.1) = 1 + .1c_1 = -1$

$\Rightarrow c_1 = -20$

$p_2(.4) = c_0 + c_1(.2) + c_2(.2)(.1)$

$= 1 - 20(.2) + c_2(.02)$

$= 1 - 4 + c_2(.02)$

$= 2$

$\Rightarrow c_2 = 250$

Så:

$$P_2 = c_0 + c_1(x-.2) + c_2(x-.2)(x-.3)$$
$$= 1 - 20(x-.2) + 250(x-.2)(x-.3)$$
$$= 1 - 20x + 4 + 250(x^2 - .5x + .06)$$
$$= 5 - 20x + 250x^2 - 125x + 15$$
$$= 250x^2 - 145x + 20$$

och vi kan kolla att

$$P_2(.2) = 1$$
$$P_2(.3) = -1$$
$$P_3(.4) = 2$$

4.2

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

x_i	f_i
.2	1
.3	-1
.4	2

a_i är okända

vi behöver:

$$p_2(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f_1$$
$$p_2(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f_2$$
$$p_3(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = f_3$$

skriva om:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

som är lika med

$$\begin{bmatrix} 1 & .2 & .04 \\ 1 & .3 & .09 \\ 1 & .4 & .16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Lösa ekvationen med Gausselimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & .2 & .04 & 1 \\ 1 & .3 & .09 & -1 \\ 1 & .4 & .16 & 2 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & .2 & .04 & 1 \\ 0 & .1 & .05 & -2 \\ 0 & .2 & .12 & 1 \end{array}\right) (-2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & .2 & .04 & 1 \\ 0 & .1 & .05 & -2 \\ 0 & 0 & .02 & 5 \end{array}\right)$$

så har vi

$$a_0 + .2a_1 + .04a_2 = 1$$
$$.1a_1 + .05a_2 = -2$$
$$.02a_2 = 5$$

Tredje linje ger: $a_2 = 250$

Andra linje ger: $.1a_1 + .05(250) = -2$

$\Rightarrow a_1 = -145$

Första linje ger: $a_0 - .2(145) + .04(250) = 1$

$\Rightarrow a_0 = 20$

Så: $p(x) = 20 - 145x + 250x^2$ (samma som i 4.1. Interpolation med en vandermondematris)

4.3

Kom ihåg sats 4.1.2

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ vara godtyckliga reella tal som är skilda från varandra. Om $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ är godtyckliga reella tal finns det ett unikt bestämt polynom P av grad högst n så att

$$p(x_i) = f_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Så: vi vill ha ett unikt polynom av grad 3

$\Rightarrow n = 3$

så, vi behöver $n+1$ punkter, dvs 4 punkter

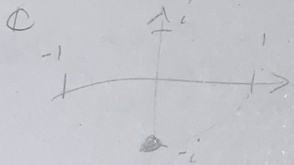
4.5

$$x = \begin{bmatrix} .1 \\ .3 \\ .5 \\ .7 \end{bmatrix}$$ vi behöver beräkna $$y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$\omega = e^{-i2\pi/n}$, vi har x_j, $j = 0, \dots, 3$

Om vi följer exempel 4.2.2 då är $3 = n-1$
$\Rightarrow n = 4$

$$\omega = e^{-i2\pi/4} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$



$\mathfrak{X}$ är som i (4.1)

$$\mathfrak{X} = \begin{bmatrix} \omega^0 \\ \omega^{-1} \\ \omega^{-2} \\ \omega^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^0 \\ \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} \\ \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{-2} \\ \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^0 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} \\ e^{i\pi} \\ e^{i\frac{3\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^4$$