Stockholms matematiska cirkel
Matematik och musik

www.math-stockholm.se/cirkel

16:00 – 17:00 : Föreläsning

KTH VETENSKAP OCH KONST

STOCKHOLMS MATEMATIKCENTRUM

STOCKHOLMS UNIVERSITET

Om cirkeln

- 7 föreläsningar
- 7 övningstillfällen
- På distans under hösten
- Mer information finns på hemsidan

www.math-stockholm.se/cirkel

Matematik och musik

1. **(10 sep) Vad är matematik, egentligen?**
2. (8 okt) Linjär algebra
3. (12 nov) Periodiska funktioner
4. (10 dec) Interpolation
5. (2020) Tonsystem och talteori
6. (2020) FFT och trigonometrisk interpolation
7. (2020) Att skriva musik i datorn

Kapitel 1.1 – Grundbegrepp

Fyra grundbegrepp

- Definition
- Bevis
- Sats
- Axiom

En *definition* bestämmer en terms betydelse.

En *definition* bestämmer en terms betydelse.

Definition: Ett heltal n är *jämnt* om det finns ett heltal k så att $n = 2k$.

En *definition* bestämmer en terms betydelse.

Definition: Ett heltal n är *jämnt* om det finns ett heltal k så att $n = 2k$.

Definition: Ett heltal n är *udda* om det finns ett heltal k så att $n = 2k + 1$.

En *definition* bestämmer en terms betydelse.

Definition: Ett heltal n är *jämnt* om det finns ett heltal k så att $n = 2k$.

Definition: Ett heltal n är *udda* om det finns ett heltal k så att $n = 2k + 1$.

Exempel: $6 = 2 \cdot 3$ är jämnt, medan $9 = 2 \cdot 4 + 1$ är udda.

Ett *bevis* är ett argument för en slutsats utifrån definitioner och logiska slutledningsregler.

Ett *bevis* är ett argument för en slutsats utifrån definitioner och logiska slutledningsregler. En *sats* är ett påstående som bevisats vara sann.

Ett *bevis* är ett argument för en slutsats utifrån definitioner och logiska slutledningsregler. En *sats* är ett påstående som bevisats vara sann.

Sats: *Om n är jämnt, så är $n + 1$ udda.*

Ett *bevis* är ett argument för en slutsats utifrån definitioner och logiska slutledningsregler. En *sats* är ett påstående som bevisats vara sann.

Sats: *Om n är jämnt, så är $n+1$ udda.*

Bevis: Om n är jämnt kan vi skriva $n = 2k$ för något heltal k.

Ett *bevis* är ett argument för en slutsats utifrån definitioner och logiska slutledningsregler. En *sats* är ett påstående som bevisats vara sann.

Sats: *Om n är jämnt, så är $n + 1$ udda.*

Bevis: Om n är jämnt kan vi skriva $n = 2k$ för något heltal k.Då gäller

$$n + 1 = 2k + 1.$$

Alltså är $n + 1$ udda.

Ett *axiom* är ett påstående som inte behöver bevisas.

Ett *axiom* är ett påstående som inte behöver bevisas.

Ett giltigt bevis bygger på korrekta antaganden. Ett antagande är korrekt om

1. är en sats,

Ett *axiom* är ett påstående som inte behöver bevisas.

Ett giltigt bevis bygger på korrekta antaganden. Ett antagande är korrekt om

1. är en sats, eller
2. är ett axiom.

Ett *axiom* är ett påstående som inte behöver bevisas.

Ett giltigt bevis bygger på korrekta antaganden. Ett antagande är korrekt om

1. är en sats, eller
2. är ett axiom.

Axiomen är startpunkten för en matematisk teori.

Kapitel 1.2 – Mängder

En *mängd* är en samling objekt. Objekten i en mängd kallas *element*.

En *mängd* är en samling objekt. Objekten i en mängd kallas *element*.

Ändliga mängder beskrivs genom att omgärda elementen med mängdklamrarna { och }.

En *mängd* är en samling objekt. Objekten i en mängd kallas *element*.

Ändliga mängder beskrivs genom att omgärda elementen med mängdklamrarna { och }.

- $\{1, 2, 3\}$.

En *mängd* är en samling objekt. Objekten i en mängd kallas *element*.

Ändliga mängder beskrivs genom att omgärda elementen med mängdklamrarna { och }.

- $\{1, 2, 3\}$.
- $\{-\pi, 2, x\}$.

En *mängd* är en samling objekt. Objekten i en mängd kallas *element*.

Ändliga mängder beskrivs genom att omgärda elementen med mängdklamrarna { och }.

- $\{1, 2, 3\}$.
- $\{-\pi, 2, x\}$.
- $\{\text{Arvid}, \text{Beatrice}, \text{Fatima}, \text{John}\}$.

Ordning och upprepning spelar ingen roll.

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\}.$$

Ordning och upprepning spelar ingen roll.

$$\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,1,2\}.$$

Man måste kunna avgöra om ett godtyckligt x ligger i mängden eller inte.

Ordning och upprepning spelar ingen roll.

$$\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\}.$$

Man måste kunna avgöra om ett godtyckligt x ligger i mängden eller inte.

Två mängder A och B är lika om de innehåller exakt samma element. Skrivs $A = B$.

Om x är ett element i en mängd M, så skriver vi $x \in M$.

Om x är ett element i en mängd M, så skriver vi $x \in M$.

Mängden $\{\}$ innehåller inga element och kallas *den tomma mängden*.

Den betecknas med $\emptyset$.

För att beskriva oändliga mängder använder man *mängdbyggaren*:

$$M = \{x \mid \text{villkor på } x\}.$$

Då är M mängden av alla x som uppfyller villkoret.

För att beskriva oändliga mängder använder man *mängdbyggaren*:

$$M = \{x \mid \text{villkor på } x\}.$$

Då är M mängden av alla x som uppfyller villkoret. **Exempel**: Mängden av alla jämna heltal.

För att beskriva oändliga mängder använder man *mängdbyggaren*:

$$M = \{x \mid \text{villkor på } x\}.$$

Då är M mängden av alla x som uppfyller villkoret. **Exempel**: Mängden av alla jämna heltal.

$$\{x \mid x \text{ är jämnt}\} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$$

De olika talområdena har egna beteckningar.

De olika talområdena har egna beteckningar.

- Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

De olika talområdena har egna beteckningar.

- Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Heltal: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

De olika talområdena har egna beteckningar.

- Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Heltal: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Rationella tal: $\mathbb{Q} = \{1/2, 0, 4/7, \ldots\}$.

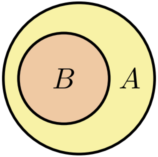
De olika talområdena har egna beteckningar.

- Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Heltal: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Rationella tal: $\mathbb{Q} = \{1/2, 0, 4/7, \dots\}$.
- Reella tal: $\mathbb{R} = \{\pi, e, \sqrt{2} \dots\}$.

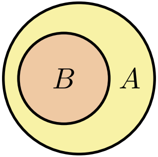
De olika talområdena har egna beteckningar.

- Naturliga tal: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- Heltal: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Rationella tal: $\mathbb{Q} = \{1/2, 0, 4/7, \ldots\}$.
- Reella tal: $\mathbb{R} = \{\pi, e, \sqrt{2} \ldots\}$.
- Komplexa tal: $\mathbb{C} = \{i, 2 - i, \ldots\}$.

En mängd B är en *delmängd* av en mängd A om alla element i B är element i A. Det betecknas $B \subset A$.

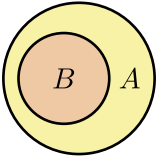


En mängd B är en *delmängd* av en mängd A om alla element i B är element i A. Det betecknas $B \subset A$.



Exempel: Om $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2\}$ så är $B \subset A$.

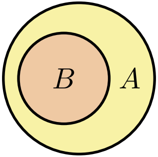
En mängd B är en *delmängd* av en mängd A om alla element i B är element i A. Det betecknas $B \subset A$.



Exempel: Om $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2\}$ så är $B \subset A$.

Exempel: Den tomma mängden $\emptyset$ är en delmängd av alla mängder.

En mängd B är en *delmängd* av en mängd A om alla element i B är element i A. Det betecknas $B \subset A$.



Exempel: Om $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2\}$ så är $B \subset A$.

Exempel: Den tomma mängden $\emptyset$ är en delmängd av alla mängder. Alla mängder är delmängder av sig själv.

En delmängd B av A är *äkta* om $B \neq \emptyset$ och $B \neq A$.

En delmängd B av A är *äkta* om $B \neq \emptyset$ och $B \neq A$.

Exempel: Mängden $\{0, 1\}$ är en äkta delmängd av $\{-1, 0, 1\}$.

En delmängd B av A är *äkta* om $B \neq \emptyset$ och $B \neq A$.

Exempel: Mängden $\{0, 1\}$ är en äkta delmängd av $\{-1, 0, 1\}$.

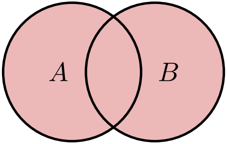
Exempel: Talområdena är äkta delmängder av varandra:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Låt A och B vara mängder.

Låt A och B vara mängder.

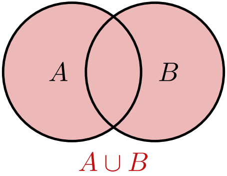
Union: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$



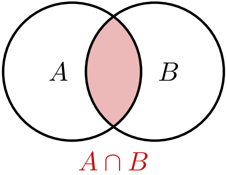
$A \cup B$

Låt A och B vara mängder.

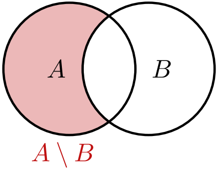
Union: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$



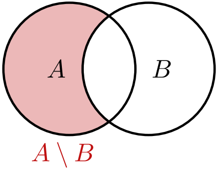
Snitt: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$



Differens: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$.

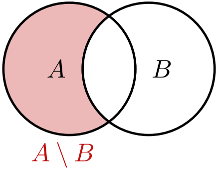


Differens: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



Exempel: Låt $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$.

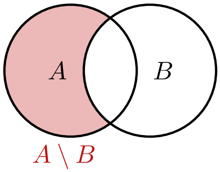
Differens: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



Exempel: Låt $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$.

1. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.

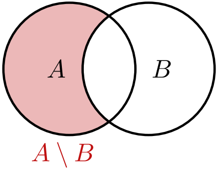
Differens: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



Exempel: Låt $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$.

1. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.
2. $A \cap B = \{2\}$.

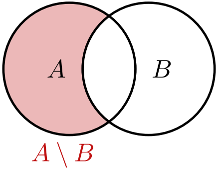
Differens: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



Exempel: Låt $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$.

1. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.
2. $A \cap B = \{2\}$.
3. $A \setminus B = \{1\}$,

Differens: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



Exempel: Låt $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$.

1. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.
2. $A \cap B = \{2\}$.
3. $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{3\}$.

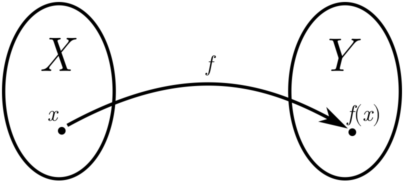
Två mängder A och B är *disjunkta* om de inte har några element gemensamt, det vill säga $A \cap B = \emptyset$.

Två mängder A och B är *disjunkta* om de inte har några element gemensamt, det vill säga $A \cap B = \emptyset$.

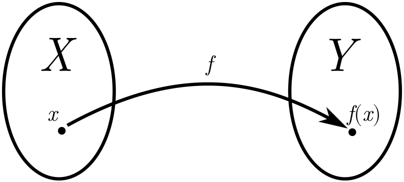
Exempel: $\{2, 4\}$ och $\{1, 3\}$ är disjunkta.

Kapitel 1.3 – Funktioner

Låt A och B vara mängder. En *funktion* $f : A \to B$ parar ihop varje $x \in A$ med ett unikt element $f(x) \in B$.

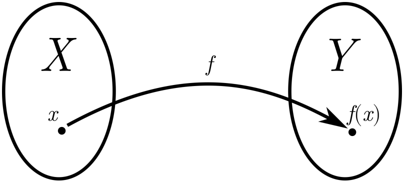


Låt A och B vara mängder. En *funktion* $f : A \to B$ parar ihop varje $x \in A$ med ett unikt element $f(x) \in B$.



A är *definitionsmängden*, B är *målmängden*.

Låt A och B vara mängder. En *funktion* $f : A \to B$ parar ihop varje $x \in A$ med ett unikt element $f(x) \in B$.



A är *definitionsmängden*, B är *målmängden*.

Exempel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$ avbildar n på det n:te kvadrattalet.

Regler för funktioner $f : A \to B$.

1. Ett värde $f(x)$ för varje $x \in A$.

Regler för funktioner $f : A \to B$.

1. Ett värde $f(x)$ för varje $x \in A$.
2. Alltid samma värde $f(x)$ för $x \in A$.

Regler för funktioner $f : A \to B$.

1. Ett värde $f(x)$ för varje $x \in A$.
2. Alltid samma värde $f(x)$ för $x \in A$.

Får inte vara slumpmässig eller delvis definierad.

Exempel:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.

Exempel:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Exempel:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
3. $h : \{\text{funktion}\} \to \{\text{funktion}\}$, $f(p(z)) = p'(z)$.

Exempel:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
3. $h : \{\text{funktion}\} \to \{\text{funktion}\}$, $f(p(z)) = p'(z)$.
4. $V : \{\text{solid kropp}\} \to \mathbb{R}$, $V(K) = \text{volym av } K$.

Exempel:

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
3. $h : \{\text{funktion}\} \to \{\text{funktion}\}$, $f(p(z)) = p'(z)$.
4. $V : \{\text{solid kropp}\} \to \mathbb{R}$, $V(K) = \text{volym av } K$.
5. $v : \{\text{fysiskt objekt}\} \to \mathbb{R}$, $v(x) = \text{farten hos } x$.

Två funktioner f och g är lika om

Två funktioner f och g är lika om

1. de har samma definitionsmängd A och målmängd B, och

Två funktioner f och g är lika om

1. de har samma definitionsmängd A och målmängd B, och
2. $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$.

Två funktioner f och g är lika om

1. de har samma definitionsmängd A och målmängd B, och
2. $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$.

Exempel: Funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x) = \frac{x - 2x}{2} \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{4x - 2x}{-4}$$

är lika.

Definition: *Golvfunktionen* avbildar ett reellt tal x på det största heltalet $\lfloor x \rfloor$ så att $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Definition: *Golvfunktionen* avbildar ett reellt tal x på det största heltalet $\lfloor x \rfloor$ så att $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Exempel: $\lfloor 2/3 \rfloor = 0$,

Definition: *Golvfunktionen* avbildar ett reellt tal x på det största heltalet $\lfloor x \rfloor$ så att $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Exempel: $\lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Definition: *Fraktionsdelen* $\mathrm{frac}(x)$ av ett reellt tal x är $\mathrm{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Definition: *Golvfunktionen* avbildar ett reellt tal x på det största heltalet $\lfloor x \rfloor$ så att $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Exempel: $\lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Definition: *Fraktionsdelen* $\text{frac}(x)$ av ett reellt tal x är $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Exempel: $\text{frac}(3/2) = 1/2$,

Definition: *Golvfunktionen* avbildar ett reellt tal x på det största heltalet $\lfloor x \rfloor$ så att $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Exempel: $\lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Definition: *Fraktionsdelen* $\mathrm{frac}(x)$ av ett reellt tal x är $\mathrm{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Exempel: $\mathrm{frac}(3/2) = 1/2$, $\lfloor e \rfloor = e - 2$.

Definition: *Golvfunktionen* avbildar ett reellt tal x på det största heltalet $\lfloor x \rfloor$ så att $\lfloor x \rfloor \leq x$.

Exempel: $\lfloor 2/3 \rfloor = 0$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$

Definition: *Fraktionsdelen* $\mathrm{frac}(x)$ av ett reellt tal x är $\mathrm{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Exempel: $\mathrm{frac}(3/2) = 1/2$, $\lfloor e \rfloor = e - 2$.

Kan ses som funktioner från $\mathbb{R}$.

Kapitel 1.4 – Bevistekniker

Bevistekniker:

1. Direkt bevis

Bevistekniker:

1. Direkt bevis
2. Motsägelsebevis

Bevistekniker:

1. Direkt bevis
2. Motsägelsebevis
3. Induktionsbevis

Bevistekniker:

1. Direkt bevis
2. Motsägelsebevis
3. Induktionsbevis

Termen indirekt bevis kan betyda olika saker och är mest förvirrande. Undvik!

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Sats: Om n är jämnt så är n^2 jämnt.

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Sats: Om n är jämnt så är n^2 jämnt.

Bevis: Om n är jämnt finns det k så att $n = 2k$.

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Sats: Om n är jämnt så är n^2 jämnt.

Bevis: Om n är jämnt finns det k så att $n = 2k$.

Då gäller att $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Sats: Om n är jämnt så är n^2 jämnt.

Bevis: Om n är jämnt finns det k så att $n = 2k$.

Då gäller att $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.

Alltså är n^2 jämnt.

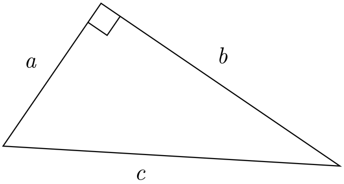
Motsägelsebevis

Antag motsatsen till det man vill bevisa, och visa att det är omöjligt.

Motsägelsebevis

Antag motsatsen till det man vill bevisa, och visa att det är omöjligt.

Sats: Summan av längden på kateterna i en rätvinklig triangel är större än längden av hypotenusan.



Sats: Summan av längden på kateterna i en rätvinklig triangel är större än längden av hypotenusan.

Sats: Summan av längden på kateterna i en rätvinklig triangel är större än längden av hypotenusan.

Bevis: Enligt Pytagoras sats gäller $a^2 + b^2 = c^2$. Antag att $a + b \leq c$. Då är $(a + b)^2 \leq c^2$.

Sats: Summan av längden på kateterna i en rätvinklig triangel är större än längden av hypotenusan.

Bevis: Enligt Pytagoras sats gäller $a^2 + b^2 = c^2$. Antag att $a + b \leq c$. Då är $(a + b)^2 \leq c^2$. Men

$$\begin{aligned} (a+b)^2 \leq c^2 &\iff a^2 + b^2 + 2ab \leq c^2 \\ &\iff c^2 + 2ab \leq c^2 \\ &\iff 2ab \leq 0. \end{aligned}$$

Sats: Summan av längden på kateterna i en rätvinklig triangel är större än längden av hypotenusan.

Bevis: Enligt Pytagoras sats gäller $a^2 + b^2 = c^2$. Antag att $a + b \leq c$. Då är $(a + b)^2 \leq c^2$. Men

$$\begin{aligned} (a+b)^2 \leq c^2 &\iff a^2 + b^2 + 2ab \leq c^2 \\ &\iff c^2 + 2ab \leq c^2 \\ &\iff 2ab \leq 0. \end{aligned}$$

Detta implicerar att någon av a och b är mindre eller lika med 0. Motsägelse!

Induktionsbevis

Påståendet

Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje naturligt tal n.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje naturligt tal n.

- P_0: Talet 0 är antingen udda eller jämnt.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje naturligt tal n.

- P_0: Talet 0 är antingen udda eller jämnt.
- P_1: Talet 1 är antingen udda eller jämnt.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \dots, P_n, \dots$ av påståenden, ett för varje naturligt tal n.

- P_0: Talet 0 är antingen udda eller jämnt.
- P_1: Talet 1 är antingen udda eller jämnt.
- P_2: Talet 2 är antingen udda eller jämnt.
- osv...

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.

Induktionssteg: Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ gäller för alla n.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.

Induktionssteg: Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ gäller för alla n.

I vårt exempel blir det

- P_0: Talet 0 är antingen udda eller jämnt.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.

Induktionssteg: Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ gäller för alla n.

I vårt exempel blir det

- P_0: Talet 0 är antingen udda eller jämnt.
- $P_n \implies P_{n+1}$: Om talet n är antingen udda eller jämnt, så är talet $n+1$ udda eller jämnt.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.
- Induktionssteget är att om du står på ett trappsteg, så kan du gå till nästa.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.
- Induktionssteget är att om du står på ett trappsteg, så kan du gå till nästa.

Man kan även tänka sig en kedja av implikationer:

$$P_0 \implies P_1 \implies \cdots \implies P_n \implies P_{n+1} \implies \cdots$$

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.
- Induktionssteget är att om du står på ett trappsteg, så kan du gå till nästa.

Man kan även tänka sig en kedja av implikationer:

$$P_0 \implies P_1 \implies \cdots \implies P_n \implies P_{n+1} \implies \cdots$$

Basfallet är att visa att P_0 gäller, medan $P_n \implies P_{n+1}$ visar att nästa steg alltid kan tas.

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.
- Bevisa P_0 med valfri bevismetod.

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.
- Bevisa P_0 med valfri bevismetod.
- Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ med valfri bevismetod.

Tricket: I sista steget får man använda P_n när man ska visa P_{n+1}.

Sats: Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

Sats: Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

Basfall: Bevisa att talet 0 är antingen udda eller jämnt. Följer av att $0 = 2 \cdot 0$, alltså är 0 är jämnt.

Sats: Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

Basfall: Bevisa att talet 0 är antingen udda eller jämnt. Följer av att $0 = 2 \cdot 0$, alltså är 0 är jämnt.

Induktionssteg: Bevisa att om talet n är antingen udda eller jämnt, så är talet $n + 1$ udda eller jämnt. Två fall:

Sats: Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

Basfall: Bevisa att talet 0 är antingen udda eller jämnt. Följer av att $0 = 2 \cdot 0$, alltså är 0 är jämnt.

Induktionssteg: Bevisa att om talet n är antingen udda eller jämnt, så är talet $n + 1$ udda eller jämnt. Två fall:

1. Om n är jämnt, så är n udda. Detta gjorde vi innan.

Sats: Alla naturliga tal är antingen udda eller jämna.

Basfall: Bevisa att talet 0 är antingen udda eller jämnt. Följer av att $0 = 2 \cdot 0$, alltså är 0 är jämnt.

Induktionssteg: Bevisa att om talet n är antingen udda eller jämnt, så är talet $n + 1$ udda eller jämnt. Två fall:

1. Om n är jämnt, så är n udda. Detta gjorde vi innan.
2. Om n är udda, så är $n = 2k + 1$ för något heltal. Då är

$$n + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1).$$

   Alltså är $n + 1$ jämnt.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (28/9). Det är ett övningstillfälle.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (28/9). Det är ett övningstillfälle.

Nästa föreläsning är om fyra veckor (8/10). Då kommer vi prata om linjär algebra.