Stockholms matematiska cirkel
Matematik och musik

www.math-stockholm.se/cirkel

16:00 – 16:05 : Information från Intize
16:05 – 17:05 : Föreläsning

STOCKHOLMS MATEMATIKCENTRUM

Om cirkeln

- 7 föreläsningar
- 7 övningstillfällen
- På distans under hösten
- Mer information finns på hemsidan

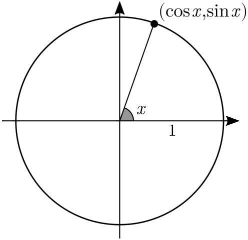
www.math-stockholm.se/cirkel

Matematik och musik

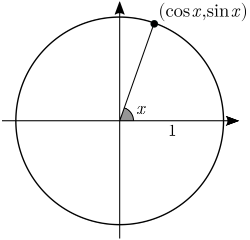
1. (10 sep) Vad är matematik, egentligen?
2. (8 okt) Linjär algebra
3. **(12 nov) Periodiska funktioner och komplexa tal**
4. (10 dec) Interpolation
5. (2020) Tonsystem och talteori
6. (2020) FFT och trigonometrisk interpolation
7. (2020) Att skriva musik i datorn

Kapitel 3.1 – Trigonometriska funktioner

Enhetscirkeln är cirkeln med mittpunkt i origo och radien 1.

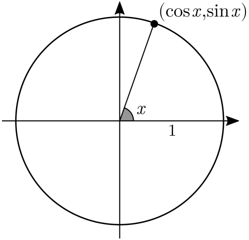


Enhetscirkeln är cirkeln med mittpunkt i origo och radien 1.



Enhetscirkeln definierar de trigonometriska funktionerna $\cos(x)$ och $\sin(x)$.

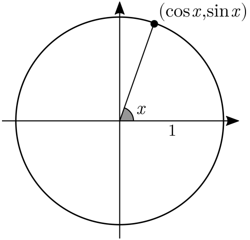
Enhetscirkeln är cirkeln med mittpunkt i origo och radien 1.



Enhetscirkeln definierar de trigonometriska funktionerna $\cos(x)$ och $\sin(x)$. Tangens definieras utifrån cosinus och sinus, genom

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Enhetscirkeln är cirkeln med mittpunkt i origo och radien 1.



Enhetscirkeln definierar de trigonometriska funktionerna $\cos(x)$ och $\sin(x)$. Tangens definieras utifrån cosinus och sinus, genom

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Notation: $(\sin x)^2 = \sin^2 x$ och $(\cos x)^2 = \cos^2 x$.

Matematiker mäter vinklar i *radianer*.

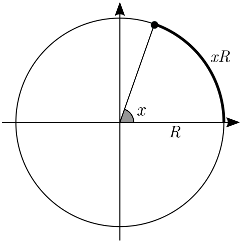
Matematiker mäter vinklar i *radianer*. Ett varv, 360 grader, är 2π radianer.

$$1 \text{ radian} = \frac{360}{2\pi} \text{ grader.}$$

Matematiker mäter vinklar i *radianer*. Ett varv, 360 grader, är 2π radianer.

$$1 \text{ radian} = \frac{360}{2\pi} \text{ grader.}$$

Vinkeln i radianer är längden på bågsegmentet som vinkeln gör i enhetscirkeln.



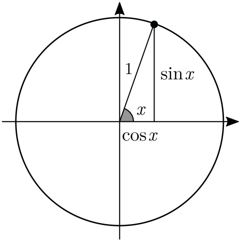
Sats: *(Trigonometriska ettan) Alla vinklar x uppfyller att*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Sats: *(Trigonometriska ettan) Alla vinklar x uppfyller att*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Bevis: Pytagoras sats och enhetscirkeln.



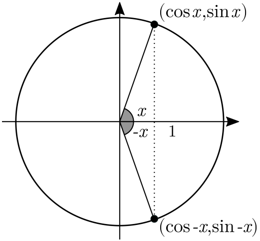
Sats: *För alla vinklar x gäller att*

$$\cos(-x) = \cos x \text{ och } \sin(-x) = -\sin x$$

Sats: *För alla vinklar x gäller att*

$$\cos(-x) = \cos x \text{ och } \sin(-x) = -\sin x$$

Bevis: Utgå ifrån enhetscirkeln.



Kapitel 3.2 – Komplexa tal

Ekvationen

$$x^2 = -1.$$

saknar lösningar bland de reella talen. För att lösa den behöver vi utvidga de reella talen.

Ekvationen

$$x^2 = -1.$$

saknar lösningar bland de reella talen. För att lösa den behöver vi utvidga de reella talen.

Ett *komplext tal* är ett tal på formen $a + bi$ där a och b är reella tal och i är ett tal som uppfyller $i^2 = -1$.

Ekvationen

$$x^2 = -1.$$

saknar lösningar bland de reella talen. För att lösa den behöver vi utvidga de reella talen.

Ett *komplext tal* är ett tal på formen $a + bi$ där a och b är reella tal och i är ett tal som uppfyller $i^2 = -1$.

Mängden av alla komplexa tal betecknas $\mathbb{C}$. Variabler som tar värden i $\mathbb{C}$ betecknas vanligtvis med z och w.

Talet i kallas den *imaginära enheten*.

Talet i kallas den *imaginära enheten*.

Om $a + bi$ är ett komplext tal kallas a för talets *realdel* och b för talets *imaginärdel*.

Talet i kallas den *imaginära enheten*.

Om $a + bi$ är ett komplext tal kallas a för talets *realdel* och b för talets *imaginärdel*.

- $2 - 3i$ har realdel 2.

Talet i kallas den *imaginära enheten*.

Om $a + bi$ är ett komplext tal kallas a för talets *realdel* och b för talets *imaginärdel*.

- $2 - 3i$ har realdel 2.
- $-2 - i$ har imaginärdel -1.

Talet i kallas den *imaginära enheten*.

Om $a + bi$ är ett komplext tal kallas a för talets *realdel* och b för talets *imaginärdel*.

- $2 - 3i$ har realdel 2.
- $-2 - i$ har imaginärdel -1.

Obs: den imaginära enheten i ingår **inte** i imaginärdelen.

Man adderar, subtraherar och multiplicerar komplexa tal genom att använda $i^2 = -1$ och vanliga räkneregler.

Man adderar, subtraherar och multiplicerar komplexa tal genom att använda $i^2 = -1$ och vanliga räkneregler.

- $(2 + 3i) + (-5 + 2i) = (2 - 5) + (3 + 2)i = -3 + 5i$

Man adderar, subtraherar och multiplicerar komplexa tal genom att använda $i^2 = -1$ och vanliga räkneregler.

- $(2+3i)+(-5+2i) = (2-5)+(3+2)i = -3+5i$
- $(-1-3i)-2i = (-1-0)+(-3-2)i = -1-5i$

Man adderar, subtraherar och multiplicerar komplexa tal genom att använda $i^2 = -1$ och vanliga räkneregler.

- $(2+3i)+(-5+2i) = (2-5)+(3+2)i = -3+5i$
- $(-1-3i)-2i = (-1-0)+(-3-2)i = -1-5i$
- $(2+i)(-1-i) = -2-2i-i-i^2 = -2-3i-(-1) = -1-3i$

Konjugatet av ett komplext tal $z = a + bi$ är talet $a - bi$. Det betecknas $\bar{z}$.

Konjugatet av ett komplext tal $z = a + bi$ är talet $a - bi$. Det betecknas $\bar{z}$.

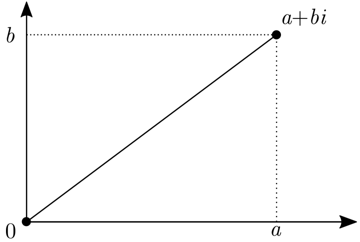
Genom att förlänga nämnaren med dess konjugat kan vi dividera komplexa tal med varandra.

Konjugatet av ett komplext tal $z = a + bi$ är talet $a - bi$. Det betecknas $\bar{z}$.

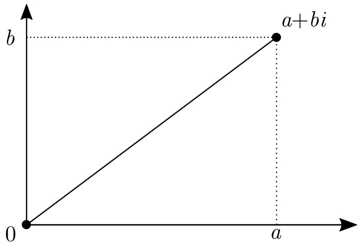
Genom att förlänga nämnaren med dess konjugat kan vi dividera komplexa tal med varandra.

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{-1-i} &= \frac{(2+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-2+2i-i+i^2}{(-1)^2-i+i-i^2}\\ &= \frac{-3+i}{2} = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i\end{aligned}$$

Vi har beskrivit hur man kan räkna med komplexa tal. Vi kan visualisera dem som ett plan.

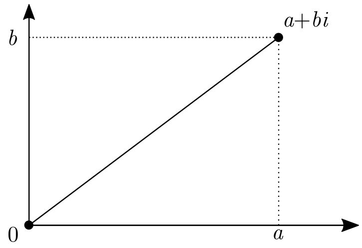


Vi har beskrivit hur man kan räkna med komplexa tal. Vi kan visualisera dem som ett plan.



Vinkeln mellan x-axeln och linjesegmentet från origo till talet kallas för talets *argument*.

Vi har beskrivit hur man kan räkna med komplexa tal. Vi kan visualisera dem som ett plan.

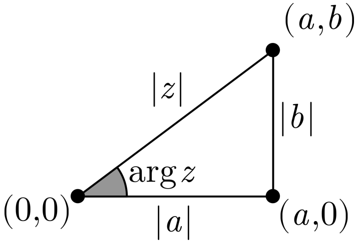


Vinkeln mellan x-axeln och linjesegmentet från origo till talet kallas för talets *argument*. Avståndet mellan origo och talet kallas för talets *magnitud*. De betecknas med $\arg(z)$ respektive $|z|$.

Sats: Magnituden av talet $z = a + bi$ är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

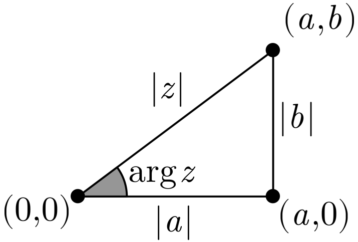
Sats: Magnituden av talet $z = a + bi$ är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bevis: Betrakta följande figur.



Sats: Magnituden av talet $z = a + bi$ är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

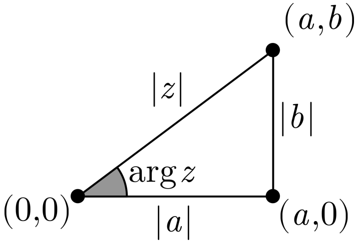
Bevis: Betrakta följande figur.



Enligt Pytagoras sats gäller $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Sats: Magnituden av talet $z = a + bi$ är $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bevis: Betrakta följande figur.

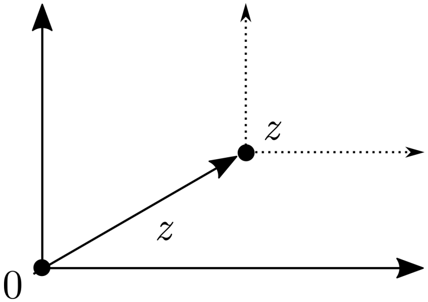


Enligt Pytagoras sats gäller $|z|^2 = a^2 + b^2$. Genom att dra kvadratroten ur båda sidor får vi

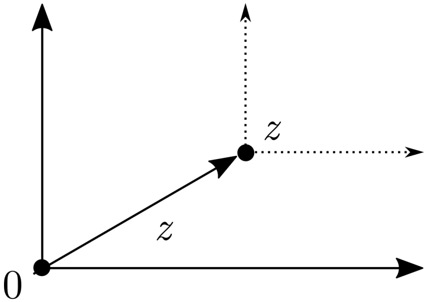
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Addition och subtraktion av ett komplext tal z motsvarar att translatera (flytta) talplanet så att origo hamnar i z.

Addition och subtraktion av ett komplext tal z motsvarar att translatera (flytta) talplanet så att origo hamnar i z.



Addition och subtraktion av ett komplext tal z motsvarar att translatera (flytta) talplanet så att origo hamnar i z.



Kan multiplikation också ses som en geometrisk transformation?

Sats: *Om r är ett positivt reellt tal och z är ett komplext tal så gäller*

$$|rz| = r|z| \textit{ och } \arg(rz) = \arg(z).$$

Sats: *Om r är ett positivt reellt tal och z är ett komplext tal så gäller*

$$|rz| = r|z| \textit{ och } \arg(rz) = \arg(z).$$

Bevis: Eftersom r är reellt gäller att $rz = ra + rbi$.

Sats: *Om r är ett positivt reellt tal och z är ett komplext tal så gäller*

$$|rz| = r|z| \text{ och } \arg(rz) = \arg(z).$$

Bevis: Eftersom r är reellt gäller att $rz = ra + rbi$. Alltså gäller att

Sats: *Om r är ett positivt reellt tal och z är ett komplext tal så gäller*

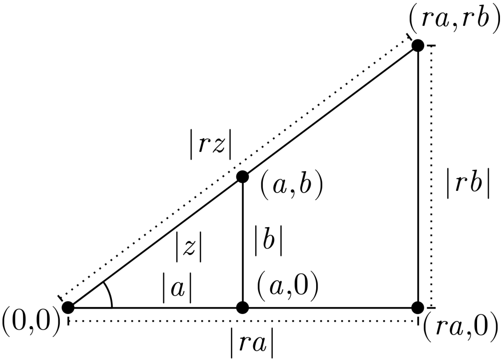
$$|rz| = r|z| \text{ och } \arg(rz) = \arg(z).$$

Bevis: Eftersom r är reellt gäller att $rz = ra + rbi$. Alltså gäller att

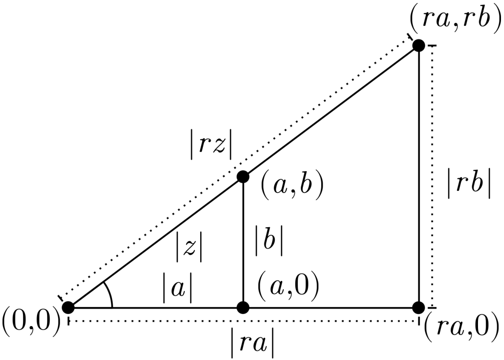
$$\begin{aligned} |rz| &= \sqrt{(ra)^2 + (rb)^2} = \sqrt{r^2a^2 + r^2b^2} \\ &= \sqrt{r^2}\sqrt{a^2 + b^2} = r|z| \end{aligned}$$

eftersom r är positivt.

Vidare ser vi att trianglarna som spänns upp av *rz* och *z* är likformiga.



Vidare ser vi att trianglarna som spänns upp av rz och z är likformiga.



Därmed gäller $\arg(rz) = \arg(z)$.

Multiplikation med positiva reella tal motsvarar alltså att sträcka ut eller dra ihop det komplexa talplanet. Men vad händer när imaginärdelen är nollskild?

Multiplikation med positiva reella tal motsvarar alltså att sträcka ut eller dra ihop det komplexa talplanet. Men vad händer när imaginärdelen är nollskild?

Sats: *(Eulers formel) För alla reella tal x gäller*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Multiplikation med positiva reella tal motsvarar alltså att sträcka ut eller dra ihop det komplexa talplanet. Men vad händer när imaginärdelen är nollskild?

Sats: *(Eulers formel) För alla reella tal x gäller*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Om $x = \pi$ får vi $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, det vill säga

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Multiplikation med positiva reella tal motsvarar alltså att sträcka ut eller dra ihop det komplexa talplanet. Men vad händer när imaginärdelen är nollskild?

Sats: *(Eulers formel) För alla reella tal x gäller*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Om $x = \pi$ får vi $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, det vill säga

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Detta kallas för *Eulers identitet*.

Sats: *Om z är ett komplext tal så att $|z| = 1$, så är $z = e^{i \arg(z)}$.*

Sats: *Om z är ett komplext tal så att $|z| = 1$, så är $z = e^{i \arg(z)}$.*

Bevis: Om $|z| = 1$, så ligger z på enhetscirkeln. Låt $v = \arg(z)$.

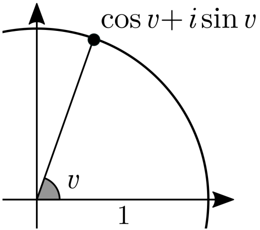
Sats: *Om z är ett komplext tal så att $|z| = 1$, så är $z = e^{i\arg(z)}$.*

Bevis: Om $|z| = 1$, så ligger z på enhetscirkeln. Låt $v = \arg(z)$. Enligt definitionen av $\cos(x)$ och $\sin(x)$ och Eulers formel gäller

Sats: *Om z är ett komplext tal så att $|z| = 1$, så är $z = e^{i\arg(z)}$.*

Bevis: Om $|z| = 1$, så ligger z på enhetscirkeln. Låt $v = \arg(z)$. Enligt definitionen av $\cos(x)$ och $\sin(x)$ och Eulers formel gäller

$$z = \cos v + i \sin v = e^{iv} = e^{i\arg(z)}.$$



Sats: *Alla nollskilda komplexa tal z kan skrivas på formen* $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Sats: *Alla nollskilda komplexa tal z kan skrivas på formen* $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Bevis: Eftersom z är nollskilt, kan vi skriva

$$z = \frac{|z|}{|z|} \cdot z = |z| \cdot \left(\frac{1}{|z|} z \right).$$

Sats: *Alla nollskilda komplexa tal z kan skrivas på formen* $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Bevis: Eftersom z är nollskilt, kan vi skriva

$$z = \frac{|z|}{|z|} \cdot z = |z| \cdot \left(\frac{1}{|z|} z \right).$$

Vidare gäller att

$$\left| \frac{1}{|z|} z \right| = \frac{1}{|z|} |z| = 1$$

Sats: *Alla nollskilda komplexa tal z kan skrivas på formen* $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Bevis: Eftersom z är nollskilt, kan vi skriva

$$z = \frac{|z|}{|z|} \cdot z = |z| \cdot \left(\frac{1}{|z|}z\right).$$

Vidare gäller att

$$\left|\frac{1}{|z|}z\right| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$$

och

$$\arg\left(\frac{z}{|z|}\right) = \arg\left(\frac{1}{|z|}z\right) = \arg(z).$$

Enligt föregående sats gäller att

$$\frac{1}{|z|}z = e^{i\arg(z/|z|)} = e^{i\arg(z)}$$

Enligt föregående sats gäller att

$$\frac{1}{|z|}z = e^{i\arg(z/|z|)} = e^{i\arg(z)}$$

och därmed att

$$z = \frac{|z|}{|z|} \cdot z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Om ett komplex tal skrivs som $|z|e^{i\arg(z)}$ kallas det för *polär form*.

Om ett komplex tal skrivs som $|z|e^{i\arg(z)}$ kallas det för *polär form*.

Sats: *Om z och w är nollskilda komplexa tal så gäller*

$$|zw| = |z| \cdot |w| \text{ och } \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Om ett komplex tal skrivs som $|z|e^{i\arg(z)}$ kallas det för *polär form*.

Sats: *Om z och w är nollskilda komplexa tal så gäller*

$$|zw| = |z| \cdot |w| \text{ och } \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Bevis: Skriv $z = |z|e^{i\arg(z)}$ och $w = |w|e^{i\arg(w)}$.

Om ett komplex tal skrivs som $|z|e^{i\arg(z)}$ kallas det för *polär form*.

Sats: *Om z och w är nollskilda komplexa tal så gäller*

$$|zw| = |z| \cdot |w| \ \textit{och} \ \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Bevis: Skriv $z = |z|e^{i\arg(z)}$ och $w = |w|e^{i\arg(w)}$. Då får vi

$$zw = |z|e^{i\arg(z)}|w|e^{i\arg(w)} = |z||w|e^{i(\arg(z)+\arg(w))}$$

vilket bevisar satsen.

Ett komplext tal kan beskrivas som en kombination av två geometriska operationer: sträckning och rotation.

Ett komplext tal kan beskrivas som en kombination av två geometriska operationer: sträckning och rotation.

Multiplikation av två komplexa tal motsvarar sammansättningen av dessa operationer.

Ett komplext tal kan beskrivas som en kombination av två geometriska operationer: sträckning och rotation.

Multiplikation av två komplexa tal motsvarar sammansättningen av dessa operationer.

Detta gör komplexa tal lämpliga för att beskriva periodiska fenomen.

Kapitel 3.3 – Periodiska funktioner

Låt X vara en godtycklig mängd.

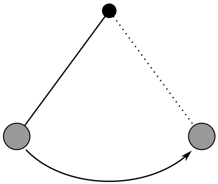
Låt X vara en godtycklig mängd.

En funktion $f : \mathbb{R} \to X$ är *periodisk* om det finns ett nollskilt, positivt tal P så att $f(x + P) = f(x)$ för alla x.

Låt X vara en godtycklig mängd.

En funktion $f : \mathbb{R} \to X$ är *periodisk* om det finns ett nollskilt, positivt tal P så att $f(x + P) = f(x)$ för alla x.

Man kan tolka en periodisk funktion som en sluten kurva i X, eller som en process som upprepar sig i tid, till exempel pendelrörelser.



Typiska exempel är de trigonometriska funktionerna $\cos x$ och $\sin x$. Dessa har period 2π.

Typiska exempel är de trigonometriska funktionerna $\cos x$ och $\sin x$. Dessa har period 2π.

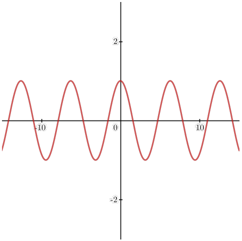
Funktionen $\mathrm{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ har period 1, eftersom

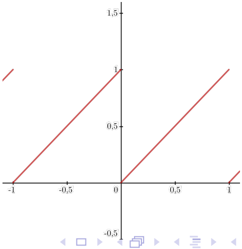
$$\begin{aligned}\mathrm{frac}(x+1) &= x+1-\lfloor x+1 \rfloor = x+1-(\lfloor x \rfloor + 1)\\ &= x - \lfloor x \rfloor = \mathrm{frac}(x)\end{aligned}$$

Typiska exempel är de trigonometriska funktionerna $\cos x$ och $\sin x$. Dessa har period 2π.

Funktionen $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ har period 1, eftersom

$$\begin{aligned} \text{frac}(x+1) &= x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= x - \lfloor x \rfloor = \text{frac}(x) \end{aligned}$$





För att bevisa att en funktion inte är periodisk används motsägelsebevis.

För att bevisa att en funktion inte är periodisk används motsägelsebevis.

Sats: *Funktionen* $f(x) = x$ *är inte periodisk.*

För att bevisa att en funktion inte är periodisk används motsägelsebevis.

Sats: *Funktionen* $f(x) = x$ *är inte periodisk.*

Antag att funktionen är periodisk.

För att bevisa att en funktion inte är periodisk används motsägelsebevis.

Sats: *Funktionen* $f(x) = x$ *är inte periodisk.*

Antag att funktionen är periodisk. Då finns det ett nollskilt tal P så att $f(x + P) = f(x)$ för alla x.

För att bevisa att en funktion inte är periodisk används motsägelsebevis.

Sats: *Funktionen $f(x) = x$ är inte periodisk.*

Antag att funktionen är periodisk. Då finns det ett nollskilt tal P så att $f(x + P) = f(x)$ för alla x. Då gäller

$$f(0 + P) = f(0) \implies P = 0.$$

Detta motsäger antagandet att f är periodisk.

En funktion har inte en period, utan flera.

En funktion har inte en period, utan flera.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med period P och n är ett positivt heltal så är nP en period till $f(x)$.*

En funktion har inte en period, utan flera.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med period P och n är ett positivt heltal så är nP en period till $f(x)$.*

Bevis: Vi använder induktion.

En funktion har inte en period, utan flera.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med period P och n är ett positivt heltal så är nP en period till $f(x)$.*

Bevis: Vi använder induktion. Basfallet är $n = 1$, och då följer det av antagandet att $f(x)$ är periodisk.

En funktion har inte en period, utan flera.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med period P och n är ett positivt heltal så är nP en period till $f(x)$.*

Bevis: Vi använder induktion. Basfallet är $n = 1$, och då följer det av antagandet att $f(x)$ är periodisk.

Antag att nP är en period till $f(x)$. Då gäller att

$$f(x+(n+1)P) = f((x+nP)+P) = f(x+nP) = f(x)$$

för alla x.

En funktion har inte en period, utan flera.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med period P och n är ett positivt heltal så är nP en period till $f(x)$.*

Bevis: Vi använder induktion. Basfallet är $n = 1$, och då följer det av antagandet att $f(x)$ är periodisk.

Antag att nP är en period till $f(x)$. Då gäller att

$$f(x + (n+1)P) = f((x + nP) + P) = f(x + nP) = f(x)$$

för alla x. Alltså är $(n+1)P$ är en period till $f(x)$.

På vilket sätt kan vi kombinera periodiska funktioner?

På vilket sätt kan vi kombinera periodiska funktioner?

Sats: *Låt c vara ett positivt tal. Om $f(x)$ är periodisk med period P så är $g(x) = f(cx)$ periodisk med period P/c.*

På vilket sätt kan vi kombinera periodiska funktioner?

Sats: *Låt c vara ett positivt tal. Om $f(x)$ är periodisk med period P så är $g(x) = f(cx)$ periodisk med period P/c.*

Bevis: För alla x gäller

$$g(x + P/c) = f(c(x + P/c)) = f(cx + P) = f(cx) = g(x).$$

På vilket sätt kan vi kombinera periodiska funktioner?

Sats: *Låt c vara ett positivt tal. Om $f(x)$ är periodisk med period P så är $g(x) = f(cx)$ periodisk med period P/c.*

Bevis: För alla x gäller

$$g(x + P/c) = f(c(x + P/c)) = f(cx + P) = f(cx) = g(x).$$

Alltså är $g(x)$ periodisk med period P/c.

Sats: *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är periodiska med period P_1 respektive P_2. Om P_1/P_2 är rationellt så är funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$ periodisk.*

Sats: *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är periodiska med period P_1 respektive P_2. Om P_1/P_2 är rationellt så är funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$ periodisk.*

Bevis: Om $P_1/P_2 = n/m$ så gäller att $mP_1 = nP_2$ för två heltal n och m.

Sats: *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är periodiska med period P_1 respektive P_2. Om P_1/P_2 är rationellt så är funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$ periodisk.*

Bevis: Om $P_1/P_2 = n/m$ så gäller att $mP_1 = nP_2$ för två heltal n och m. Kalla detta tal för P. Vi vill visa att P är en period till $h(x)$.

Sats: *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är periodiska med period P_1 respektive P_2. Om P_1/P_2 är rationellt så är funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$ periodisk.*

Bevis: Om $P_1/P_2 = n/m$ så gäller att $mP_1 = nP_2$ för två heltal n och m. Kalla detta tal för P. Vi vill visa att P är en period till $h(x)$.För alla x gäller

Sats: *Antag att* $f(x)$ *och* $g(x)$ *är periodiska med period* P_1 *respektive* P_2. *Om* P_1/P_2 *är rationellt så är funktionen* $h(x) = f(x) + g(x)$ *periodisk.*

Bevis: Om $P_1/P_2 = n/m$ så gäller att $mP_1 = nP_2$ för två heltal n och m. Kalla detta tal för P. Vi vill visa att P är en period till $h(x)$.För alla x gäller

$$\begin{aligned} h(x+P) &= f(x+P) + g(x+P) = f(x+mP_1) + g(x+nP_2) \\ &= f(x) + g(x) = h(x). \end{aligned}$$

Sats: *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är periodiska med period P_1 respektive P_2. Om P_1/P_2 är rationellt så är funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$ periodisk.*

Bevis: Om $P_1/P_2 = n/m$ så gäller att $mP_1 = nP_2$ för två heltal n och m. Kalla detta tal för P. Vi vill visa att P är en period till $h(x)$.För alla x gäller

$$
\begin{aligned}
h(x+P) &= f(x+P) + g(x+P) = f(x+mP_1) + g(x+nP_2) \\
&= f(x) + g(x) = h(x).
\end{aligned}
$$

Alltså är $h(x)$ periodisk.

Satsen kan utvidgas till godtyckligt många funktioner med induktion.

Satsen kan utvidgas till godtyckligt många funktioner med induktion.

Om kvoten mellan termernas perioder är irrationell är summan i allmänhet inte periodisk.

Satsen kan utvidgas till godtyckligt många funktioner med induktion.

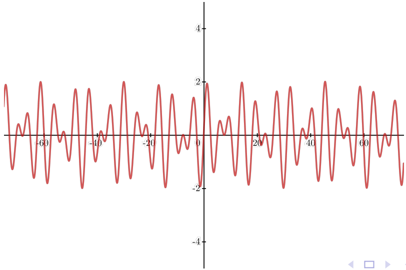
Om kvoten mellan termernas perioder är irrationell är summan i allmänhet inte periodisk. Ett exempel är

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x).$$

Satsen kan utvidgas till godtyckligt många funktioner med induktion.

Om kvoten mellan termernas perioder är irrationell är summan i allmänhet inte periodisk. Ett exempel är

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x).$$



Fundamentalperioden av en periodisk funktion $f(x)$ är den minsta perioden av $f(x)$.

Fundamentalperioden av en periodisk funktion $f(x)$ är den minsta perioden av $f(x)$.

Alla periodiska funktioner har inte en fundamentalperiod, eftersom perioder måste vara positiv.

Fundamentalperioden av en periodisk funktion $f(x)$ är den minsta perioden av $f(x)$.

Alla periodiska funktioner har inte en fundamentalperiod, eftersom perioder måste vara positiv.

Funktionen $f(x) = 0$ är periodisk men saknar fundamentalperiod.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med fundamentalperiod P så är alla dess perioder på formen nP, där n är ett positivt heltal.*

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med fundamentalperiod P så är alla dess perioder på formen nP, där n är ett positivt heltal.*

Bevis: Antag att $f(x)$ har en period Q så att $Q/P = r$ inte är ett positivt heltal.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med fundamentalperiod P så är alla dess perioder på formen nP, där n är ett positivt heltal.*

Bevis: Antag att $f(x)$ har en period Q så att $Q/P = r$ inte är ett positivt heltal. Låt $n = \lfloor r \rfloor$ och $s = \mathrm{frac}(r)$, så att $s + n = r$, $Q = rP$ och $0 < s < 1$.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med fundamentalperiod P så är alla dess perioder på formen nP, där n är ett positivt heltal.*

Bevis: Antag att $f(x)$ har en period Q så att $Q/P = r$ inte är ett positivt heltal. Låt $n = \lfloor r \rfloor$ och $s = \mathrm{frac}(r)$, så att $s + n = r$, $Q = rP$ och $0 < s < 1$.

Det sistnämnda innebär att $0 < sP < P$.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med fundamentalperiod P så är alla dess perioder på formen nP, där n är ett positivt heltal.*

Bevis: Antag att $f(x)$ har en period Q så att $Q/P = r$ inte är ett positivt heltal. Låt $n = \lfloor r \rfloor$ och $s = \text{frac}(r)$, så att $s + n = r$, $Q = rP$ och $0 < s < 1$.

Det sistnämnda innebär att $0 < sP < P$. Dessutom gäller

$$\begin{aligned} f(x+sP) &= f(x+sP+nP) = f(x+(s+n)P) \\ &= f(x+rP) = f(x+Q) = f(x) \end{aligned}$$

för alla x.

Sats: *Om $f(x)$ är periodisk med fundamentalperiod P så är alla dess perioder på formen nP, där n är ett positivt heltal.*

Bevis: Antag att $f(x)$ har en period Q så att $Q/P = r$ inte är ett positivt heltal. Låt $n = \lfloor r \rfloor$ och $s = \text{frac}(r)$, så att $s + n = r$, $Q = rP$ och $0 < s < 1$.

Det sistnämnda innebär att $0 < sP < P$. Dessutom gäller

$$\begin{aligned} f(x + sP) &= f(x + sP + nP) = f(x + (s + n)P) \\ &= f(x + rP) = f(x + Q) = f(x) \end{aligned}$$

för alla x. Alltså är sP en period av $f(x)$. Detta motsäger att P är en fundamentalperiod.

En viktig klass av periodiska funktioner är *trigonometriska polynom*.

En viktig klass av periodiska funktioner är *trigonometriska polynom*. De har formen

$$a_1 e^{-2\pi i r_1 x} + \cdots + a_n e^{-2\pi i r_n x}$$

där $r_1, \ldots, r_n$ är rationella tal och $a_1, \ldots, a_n$ är komplexa tal.

En viktig klass av periodiska funktioner är *trigonometriska polynom*. De har formen

$$a_1 e^{-2\pi i r_1 x} + \cdots + a_n e^{-2\pi i r_n x}$$

där $r_1, \ldots, r_n$ är rationella tal och $a_1, \ldots, a_n$ är komplexa tal.

Notera att trigonometriska polynom är funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{C}$.

Genom Eulers formel kan vi uttrycka trigonometriska polynom i termer av trigonometriska funktioner.

Genom Eulers formel kan vi uttrycka trigonometriska polynom i termer av trigonometriska funktioner.

$$
\begin{aligned}
e^{-2\pi i x} + 2e^{-\pi i x} &= \cos(2\pi x) - i\sin(2\pi x) + 2(\cos(\pi x) - i\sin(\pi x)) \\
&= \cos(2\pi x) + 2\cos(\pi x) - i(\sin(2\pi x) + 2\sin(\pi x))
\end{aligned}
$$

Genom Eulers formel kan vi uttrycka trigonometriska polynom i termer av trigonometriska funktioner.

$$\begin{aligned} e^{-2\pi ix} + 2e^{-\pi ix} &= \cos(2\pi x) - i\sin(2\pi x) + 2(\cos(\pi x) - i\sin(\pi x)) \\ &= \cos(2\pi x) + 2\cos(\pi x) - i(\sin(2\pi x) + 2\sin(\pi x)) \end{aligned}$$

(Här utnyttjar vi att $\cos(-x) = \cos(x)$ och $\sin(-x) = -\sin(x)$.)

Sats: *Alla trigonometriska polynom är periodiska.*

Sats: *Alla trigonometriska polynom är periodiska.*

Bevis: Enligt Eulers formel är

$$ae^{-2\pi irx} = a\cos(2\pi rx) + ai\sin(2\pi rx).$$

Sats: *Alla trigonometriska polynom är periodiska.*

Bevis: Enligt Eulers formel är

$$ae^{-2\pi irx} = a\cos(2\pi rx) + ai\sin(2\pi rx).$$

Denna funktion är periodisk med perioden $2\pi/(2\pi r) = r^{-1}$.

Sats: *Alla trigonometriska polynom är periodiska.*

Bevis: Enligt Eulers formel är

$$ae^{-2\pi irx} = a\cos(2\pi rx) + ai\sin(2\pi rx).$$

Denna funktion är periodisk med perioden $2\pi/(2\pi r) = r^{-1}$.

Trigonometriska polynom är alltså summor av periodiska funktioner med rationella perioder.

Sats: *Alla trigonometriska polynom är periodiska.*

Bevis: Enligt Eulers formel är

$$ae^{-2\pi irx} = a\cos(2\pi rx) + ai\sin(2\pi rx).$$

Denna funktion är periodisk med perioden $2\pi/(2\pi r) = r^{-1}$.

Trigonometriska polynom är alltså summor av periodiska funktioner med rationella perioder. Detta innebär att de är periodiska.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (26/11). Det är ett övningstillfälle.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (26/11). Det är ett övningstillfälle.

Nästa föreläsning är om fyra veckor (10/12). Då kommer vi prata om interpolation.