Stockholms matematiska cirkel
Matematik och musik

www.math-stockholm.se/cirkel

16:00 – 17:00 : Föreläsning

KTH VETENSKAP OCH KONST
STOCKHOLMS MATEMATIKCENTRUM
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Om cirkeln

- 8 föreläsningar
- 7 övningstillfällen
- På distans under hösten och våren
- Mer information finns på hemsidan

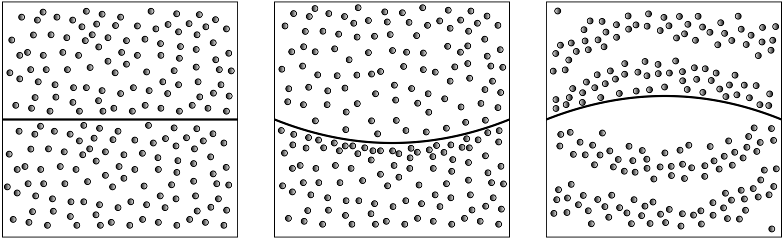
www.math-stockholm.se/cirkel

Matematik och musik

1. (10 sep) Vad är matematik, egentligen?
2. (8 okt) Linjär algebra
3. (12 nov) Periodiska funktioner och komplexa tal
4. (10 dec) Interpolation
5. **(5 feb) Tonsystem och talteori**
6. (11 mars) Diskret Fouriertransform
7. (15 april) Python, Audacity och FFT
8. (13 maj) Att läsa noter (och lyssna på dem i Audacity)

Vad är ett ljud?

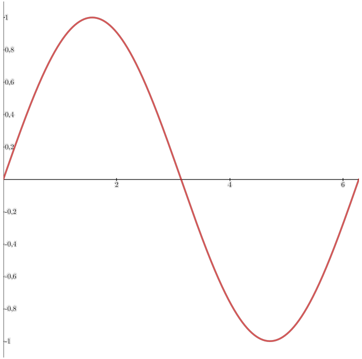
Ett ljud är en växelvis förtunning och förtätning av luften.



Figur: En sträng som skapar ett ljud

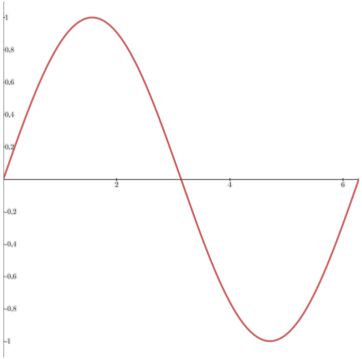
Om man mäter trycket över tid får man en sinusvåg.

Om man mäter trycket över tid får man en sinusvåg.



Figur: En kurva över lufttryck

Om man mäter trycket över tid får man en sinusvåg.

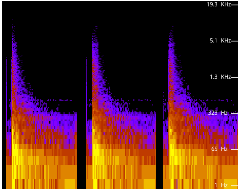


Figur: En kurva över lufttryck

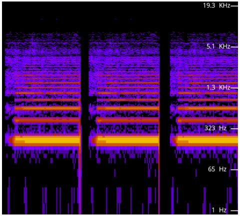
Frekvens = Tonhöjd, Amplitud = Volum.

Verkliga ljud är sammansatta av ljud med många frekvenser. De illustreras genom *spektrogram*.

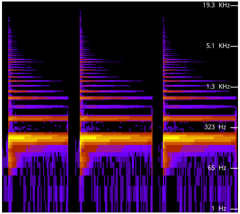
Verkliga ljud är sammansatta av ljud med många frekvenser. De illustreras genom *spektrogram*.



(a) Bastrumma



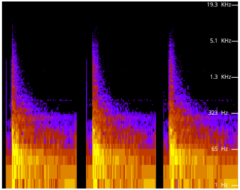
(b) Klarinett



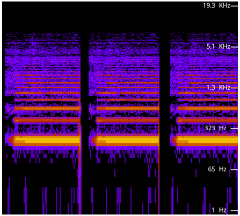
(c) Gitarr

Figur: Frekvensspektrum för olika ljud.

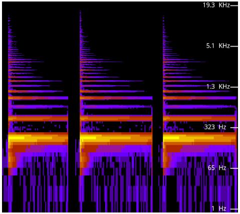
Verkliga ljud är sammansatta av ljud med många frekvenser. De illustreras genom *spektrogram*.



(a) Bastrumma



(b) Klarinett



(c) Gitarr

Figur: Frekvensspektrum för olika ljud.

Ljus färg = Hög amplitud.

Atonala ljud är en blandning av alla frekvenser inom ett register.

Atonala ljud är en blandning av alla frekvenser inom ett register.

Tonala ljud består av en grundfrekvens och ett antal övertoner.

Atonala ljud är en blandning av alla frekvenser inom ett register.

Tonala ljud består av en grundfrekvens och ett antal övertoner.

Definition: *Övertonsserien* av en frekvens f är mängden

$$O(f) = \{nf \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

Atonala ljud är en blandning av alla frekvenser inom ett register.

Tonala ljud består av en grundfrekvens och ett antal övertoner.

Definition: *Övertonsserien* av en frekvens f är mängden

$$O(f) = \{nf \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

Ljud med många gemensamma övertoner är *konsonanta*, medan ljud med få gemensamma övertoner är *dissonanta*.

Tonsystem

Definition: Ett *tonsystem* är en mängd positiva reella tal. Elementen i ett tonsystem kallas *intervall*.

Tonsystem

Definition: Ett *tonsystem* är en mängd positiva reella tal. Elementen i ett tonsystem kallas *intervall*.

Talen i ett tonsystem motsvarar *förhållanden mellan frekvenser*. För att få frekvenserna multiplicerar man med en referensfrekvens, vanligtvis 440 Hertz.

Tonsystem

Definition: Ett *tonsystem* är en mängd positiva reella tal. Elementen i ett tonsystem kallas *intervall*.

Talen i ett tonsystem motsvarar *förhållanden mellan frekvenser*. För att få frekvenserna multiplicerar man med en referensfrekvens, vanligtvis 440 Hertz.

Några intervall har särskilda namn.

Tonsystem

Definition: Ett *tonsystem* är en mängd positiva reella tal. Elementen i ett tonsystem kallas *intervall*.

Talen i ett tonsystem motsvarar *förhållanden mellan frekvenser*. För att få frekvenserna multiplicerar man med en referensfrekvens, vanligtvis 440 Hertz.

Några intervall har särskilda namn.

- Intervallet 2 kallas för *oktaven*.

Tonsystem

Definition: Ett *tonsystem* är en mängd positiva reella tal. Elementen i ett tonsystem kallas *intervall*.

Talen i ett tonsystem motsvarar *förhållanden mellan frekvenser*. För att få frekvenserna multiplicerar man med en referensfrekvens, vanligtvis 440 Hertz.

Några intervall har särskilda namn.

- Intervallet 2 kallas för *oktaven*.
- Intervallet $3/2$ kallas för *kvinten*.

Tonsystem

Definition: Ett *tonsystem* är en mängd positiva reella tal. Elementen i ett tonsystem kallas *intervall*.

Talen i ett tonsystem motsvarar *förhållanden mellan frekvenser*. För att få frekvenserna multiplicerar man med en referensfrekvens, vanligtvis 440 Hertz.

Några intervall har särskilda namn.

- Intervallet 2 kallas för *oktaven*.
- Intervallet $3/2$ kallas för *kvinten*.
- Intervallet $5/4$ kallas för *den stora tersen*.

Definition: Ett tonsystem är *rent* om det bara innehåller rationella tal.

Definition: Ett tonsystem är *rent* om det bara innehåller rationella tal.

Om kvoten mellan två frekvenser är rationellt, så har de en gemensam överton.

Definition: Ett tonsystem är *rent* om det bara innehåller rationella tal.

Om kvoten mellan två frekvenser är rationellt, så har de en gemensam överton.

Exempel: $f_1 = 150$, $f_2 = 100$ är kvoten $f_1/f_2 = 3/2$.

Deras gemensamma överton är $300 = 150 \cdot 2 = 100 \cdot 3$.

Definition: Ett tonsystem är *rent* om det bara innehåller rationella tal.

Om kvoten mellan två frekvenser är rationellt, så har de en gemensam överton.

Exempel: $f_1 = 150$, $f_2 = 100$ är kvoten $f_1/f_2 = 3/2$.

Deras gemensamma överton är $300 = 150 \cdot 2 = 100 \cdot 3$.

I ett rent tonsystem så har *alla* intervallpar minst en gemensam överton.

Att *transponera upp/ner* ett tonsystem med ett intervall I innebär att multiplicera/dividera alla toner i tonsystemet med I.

Att *transponera upp/ner* ett tonsystem med ett intervall I innebär att multiplicera/dividera alla toner i tonsystemet med I.

Exempel: Frekvensen 200 transponeras ner en oktav genom att dividera med 2. Resultatet blir 100.

Att *transponera upp/ner* ett tonsystem med ett intervall I innebär att multiplicera/dividera alla toner i tonsystemet med I.

Exempel: Frekvensen 200 transponeras ner en oktav genom att dividera med 2. Resultatet blir 100.

Definition: Ett tonsystem T är *slutet* om

$$tI \in T \quad \text{och } tI^{-1} \in T$$

för alla intervall I och t i T.

Att *transponera upp/ner* ett tonsystem med ett intervall I innebär att multiplicera/dividera alla toner i tonsystemet med I.

Exempel: Frekvensen 200 transponeras ner en oktav genom att dividera med 2. Resultatet blir 100.

Definition: Ett tonsystem T är *slutet* om

$$tI \in T \quad \text{och } tI^{-1} \in T$$

för alla intervall I och t i T.

I ett slutet tonsystem kan man transponera melodier helt fritt.

Fritt intonerade instrument kan spela alla frekvenser inom ett register.

Fast intonerade instrument spelar toner av fixa frekvenser.

Fast intonerade instrument kräver att tonsystemet är ändligt.

Fast intonerade instrument kräver att tonsystemet är ändligt.

Definition: Ett tonsystem är *ändligt underdelat* om det bara finns ändligt många intervall mellan varje intervallpar.

Fast intonerade instrument kräver att tonsystemet är ändligt.

Definition: Ett tonsystem är *ändligt underdelat* om det bara finns ändligt många intervall mellan varje intervallpar.

Alternativ formulering: T är ändligt underdelad om mängden

$$\{J \in T \mid I_1 < J < I_2\}$$

är ändlig för alla I_1, I_2 i T.

Fråga: Finns det ett tonsystem som är rent, slutet och ändligt underdelat?

Fråga: Finns det ett tonsystem som är rent, slutet och ändligt underdelat?

Definition: Om I är ett positivt reellt tal, så kallas $T(I) = \{I^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ för *tillslutningen* av I.

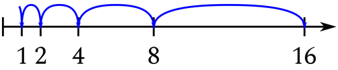
Fråga: Finns det ett tonsystem som är rent, slutet och ändligt underdelat?

Definition: Om I är ett positivt reellt tal, så kallas $T(I) = \{I^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ för *tillslutningen* av I.

Exempel: Tonsystemet

$$T(2) = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \left\{\cdots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \cdots\right\}.$$

innehåller bara oktaver.



Figur: Tillslutningen av I.

Sats: *Om I är ett intervall så är $T(I)$ slutet och ändligt underdelat. Tonsystemet är rent om och endast om I är rationellt.*

Sats: *Om I är ett intervall så är $T(I)$ slutet och ändligt underdelat. Tonsystemet är rent om och endast om I är rationellt.*

Bevis: Om I är rationellt, så är alla tal på formen I^n också rationella, och vice versa.

Sats: *Om I är ett intervall så är $T(I)$ slutet och ändligt underdelat. Tonsystemet är rent om och endast om I är rationellt.*

Bevis: Om I är rationellt, så är alla tal på formen I^n också rationella, och vice versa.

Om t ligger i $T(I)$, så är $t = I^n$ för något heltal n.

Sats: *Om I är ett intervall så är $T(I)$ slutet och ändligt underdelat. Tonsystemet är rent om och endast om I är rationellt.*

Bevis: Om I är rationellt, så är alla tal på formen I^n också rationella, och vice versa.

Om t ligger i $T(I)$, så är $t = I^n$ för något heltal n. Då gäller att $tI = I^n I = I^{n+1}$ och $tI^{-1} = I^n I^{-1} = I^{n-1}$.

Sats: *Om I är ett intervall så är $T(I)$ slutet och ändligt underdelat. Tonsystemet är rent om och endast om I är rationellt.*

Bevis: Om I är rationellt, så är alla tal på formen I^n också rationella, och vice versa.

Om t ligger i $T(I)$, så är $t = I^n$ för något heltal n. Då gäller att $tI = I^n I = I^{n+1}$ och $tI^{-1} = I^n I^{-1} = I^{n-1}$. Dessa ligger i $T(I)$ eftersom $n+1$ och $n-1$ är heltal.

Sats: *Om I är ett intervall så är $T(I)$ slutet och ändligt underdelat. Tonsystemet är rent om och endast om I är rationellt.*

Bevis: Om I är rationellt, så är alla tal på formen I^n också rationella, och vice versa.

Om t ligger i $T(I)$, så är $t = I^n$ för något heltal n. Då gäller att $tI = I^n I = I^{n+1}$ och $tI^{-1} = I^n I^{-1} = I^{n-1}$. Dessa ligger i $T(I)$ eftersom $n+1$ och $n-1$ är heltal.

Alltså är $T(I)$ slutet.

Slutligen så medför $I^n < J < I^m$ att $n < m$ eller $m < n$.

Slutligen så medför $I^n < J < I^m$ att $n < m$ eller $m < n$.

- Om $n < m$ så är J något av intervallen $I^{n+1}, \ldots, I^{m-1}$.

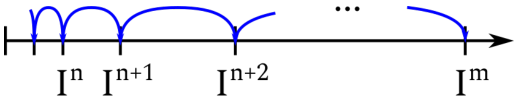
Slutligen så medför $I^n < J < I^m$ att $n < m$ eller $m < n$.

- Om $n < m$ så är J något av intervallen $I^{n+1}, \ldots, I^{m-1}$.
- Om $m < n$ så är J något av intervallen $I^{m+1}, \ldots, I^{n-1}$.

Slutligen så medför $I^n < J < I^m$ att $n < m$ eller $m < n$.

- Om $n < m$ så är J något av intervallen $I^{n+1}, \ldots, I^{m-1}$.
- Om $m < n$ så är J något av intervallen $I^{m+1}, \ldots, I^{n-1}$.

Detta bevisar att $T(I)$ är ändligt underdelat.



Figur: Fallet $n < m$ om $I_1 > 1$.

Vi har visat att alla $T(I)$ är rent, ändligt underdelat och slutet när I är rationellt.

Vi har visat att alla $T(I)$ är rent, ändligt underdelat och slutet när I är rationellt.

Nu ska vi visa att dessa är de enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemen.

Vi har visat att alla $T(I)$ är rent, ändligt underdelat och slutet när I är rationellt.

Nu ska vi visa att dessa är de enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemen.

Sats: *Om T är ett ändligt underdelat, slutet och rent tonsystem så finns det ett rationellt tal I så att $T = T(I)$.*

Vi har visat att alla $T(I)$ är rent, ändligt underdelat och slutet när I är rationellt.

Nu ska vi visa att dessa är de enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemen.

Sats: *Om T är ett ändligt underdelat, slutet och rent tonsystem så finns det ett rationellt tal I så att $T = T(I)$.*

Alla ändligt underdelade, slutna och rena tonsystem genereras alltså av ett rationellt intervall.

Talteori

Sats: *Om ett talsystem T är slutet och ändligt underdelat så har ekvationen*

$$I_1^n = I_2^m$$

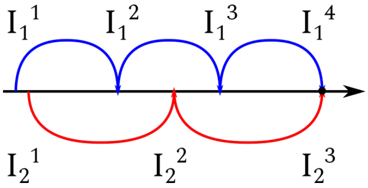
heltalslösningar n och m för alla intervall I_1 och I_2 i T.

Talteori

Sats: *Om ett talsystem T är slutet och ändligt underdelat så har ekvationen*

$$I_1^n = I_2^m$$

heltalslösningar n och m för alla intervall I_1 och I_2 i T.



Figur: Ekvationen $I_1^4 = I_2^3$.

Bevisidé: Anta att T är slutet och att ekvationen saknar lösningar för l_1 och l_2.

Bevisidé: Anta att T är slutet och att ekvationen saknar lösningar för I_1 och I_2.

Vi visar att T inte är ändligt underdelat i tre steg.

Bevisidé: Anta att T är slutet och att ekvationen saknar lösningar för l_1 och l_2.

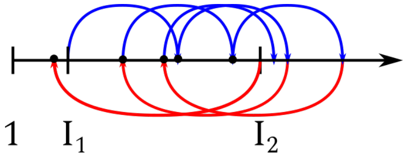
Vi visar att T inte är ändligt underdelat i tre steg.

1. Visa att för varje heltal n så finns ett heltal m_n så att olikheten $1 < l_1^n l_2^{m_n} < l_2$ gäller.

Bevisidé: Anta att T är slutet och att ekvationen saknar lösningar för I_1 och I_2.

Vi visar att T inte är ändligt underdelat i tre steg.

1. Visa att för varje heltal n så finns ett heltal m_n så att olikheten $1 < I_1^n I_2^{m_n} < I_2$ gäller.

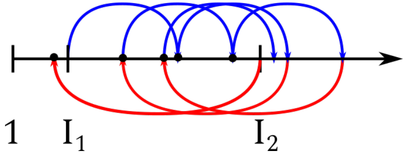


Figur: Intervall på formen $I_1^n I_2^{m_n}$.

2. Visa att $I_1^n I_2^{m_n}$ ligger i tonsystemet T.

2. Visa att $I_1^n I_2^{m_n}$ ligger i tonsystemet T.
3. Visa att alla tal på formen $I_1^n I_2^{m_n}$ är olika.

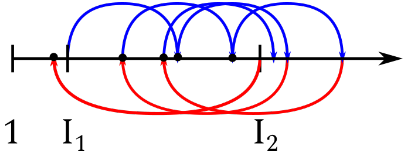
2. Visa att $I_1^n I_2^{m_n}$ ligger i tonsystemet T.
3. Visa att alla tal på formen $I_1^n I_2^{m_n}$ är olika.



Figur: Intervall på formen $I_1^n I_2^{m_n}$.

2. Visa att $I_1^n I_2^{m_n}$ ligger i tonsystemet T.

3. Visa att alla tal på formen $I_1^n I_2^{m_n}$ är olika.



Figur: Intervall på formen $I_1^n I_2^{m_n}$.

(Idé till 3: Om $I_1^n I_2^{m_n} = I_1^k I_2^{m_k}$, så är $I_1^{n-k} = I_2^{m_k - m_n}$.)

Exempel: Om $l_1 = 3/2$ och $l_2 = 2$ får vi följande tabell.

Exempel: Om $l_1 = 3/2$ och $l_2 = 2$ får vi följande tabell.

n	m_n	$l_1^n \cdot l_2^{m_n}$
1	0	$3/2 = (3/2)^1 \cdot (2)^0$
2	-1	$9/8 = (3/2)^2 \cdot (2)^{-1}$
3	-1	$27/16 = (3/2)^3 \cdot (2)^{-1}$
4	-2	$81/64 = (3/2)^4 \cdot (2)^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exempel: Om $l_1 = 3/2$ och $l_2 = 2$ får vi följande tabell.

n	m_n	$l_1^n \cdot l_2^{m_n}$
1	0	$3/2 = (3/2)^1 \cdot (2)^0$
2	-1	$9/8 = (3/2)^2 \cdot (2)^{-1}$
3	-1	$27/16 = (3/2)^3 \cdot (2)^{-1}$
4	-2	$81/64 = (3/2)^4 \cdot (2)^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Täljaren alltid är udda, och nämnaren alltid är jämn. Därför blir aldrig $l_1^n \cdot l_2^{m_n} = 1$.

Exempel: Om $l_1 = 3/2$ och $l_2 = 2$ får vi följande tabell.

n	m_n	$l_1^n \cdot l_2^{m_n}$
1	0	$3/2 = (3/2)^1 \cdot (2)^0$
2	-1	$9/8 = (3/2)^2 \cdot (2)^{-1}$
3	-1	$27/16 = (3/2)^3 \cdot (2)^{-1}$
4	-2	$81/64 = (3/2)^4 \cdot (2)^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Täljaren alltid är udda, och nämnaren alltid är jämn. Därför blir aldrig $l_1^n \cdot l_2^{m_n} = 1$.

Kan vi generalisera det?

Om n och m är positiva heltal så kan ekvationen $I_1^n = I_2^m$ kan skrivas som

$$r = \sqrt[m]{I_1} = \sqrt[n]{I_2}$$

Om n och m är positiva heltal så kan ekvationen $l_1^n = l_2^m$ kan skrivas som

$$r = \sqrt[m]{l_1} = \sqrt[n]{l_2}$$

Talet r kallas för en *gemensam rot* till l_1 och l_2.

Om n och m är positiva heltal så kan ekvationen $l_1^n = l_2^m$ kan skrivas som

$$r = \sqrt[m]{l_1} = \sqrt[n]{l_2}$$

Talet r kallas för en *gemensam rot* till l_1 och l_2.

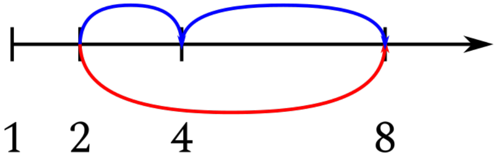
Exempel: Talen 4 och 8 har 2 som gemensam rot, eftersom $\sqrt[3]{8} = 2$ och $\sqrt[2]{4} = 2$. Alternativt $2^3 = 8$ och $2^2 = 4$.

Om n och m är positiva heltal så kan ekvationen $I_1^n = I_2^m$ kan skrivas som

$$r = \sqrt[m]{I_1} = \sqrt[n]{I_2}$$

Talet r kallas för en *gemensam rot* till I_1 och I_2.

Exempel: Talen 4 och 8 har 2 som gemensam rot, eftersom $\sqrt[3]{8} = 2$ och $\sqrt[2]{4} = 2$. Alternativt $2^3 = 8$ och $2^2 = 4$.



Figur: 2 är gemensam rot till 4 och 8.

Talen 2 och 3 har ingen gemensam rot.

Talen 2 och 3 har ingen gemensam rot.

Bevis: Anta att r uppfyller att $r^k = 2$ och $r^l = 3$.

Talen 2 och 3 har ingen gemensam rot.

Bevis: Anta att r uppfyller att $r^k = 2$ och $r^l = 3$. Då gäller

$$(r^k)^l = r^{kl} = (r^l)^k \Leftrightarrow 2^l = 3^k$$

Talen 2 och 3 har ingen gemensam rot.

Bevis: Anta att r uppfyller att $r^k = 2$ och $r^l = 3$. Då gäller

$$(r^k)^l = r^{kl} = (r^l)^k \Leftrightarrow 2^l = 3^k$$

Men detta är omöjligt! 2^l är jämnt och 3^k är udda.

För att hitta rena, slutna och ändligt underdelade tonsystem måste vi studera gemensamma rötter av rationella tal.

För att hitta rena, slutna och ändligt underdelade tonsystem måste vi studera gemensamma rötter av rationella tal.

Vi ska använda *aritmetikens fundamentalsats*.

För att hitta rena, slutna och ändligt underdelade tonsystem måste vi studera gemensamma rötter av rationella tal.

Vi ska använda *aritmetikens fundamentalsats*.

Definition: Ett heltal a *delar* ett heltal b ifall det finns ett heltal n så att $b = an$.

För att hitta rena, slutna och ändligt underdelade tonsystem måste vi studera gemensamma rötter av rationella tal.

Vi ska använda *aritmetikens fundamentalsats*.

Definition: Ett heltal a *delar* ett heltal b ifall det finns ett heltal n så att $b = an$.

Exempel: 4 delar $20 = 4 \cdot 5$, men delar inte 21.

Definition: Ett *primtal* p är ett heltal som är större än 1 och endast är delbart med sig själv och 1.

Definition: Ett *primtal* p är ett heltal som är större än 1 och endast är delbart med sig själv och 1.

Exempel: 5 och 11 är primtal. $6 = 2 \cdot 3$ är inte ett primtal.

Definition: Ett *primtal* p är ett heltal som är större än 1 och endast är delbart med sig själv och 1.

Exempel: 5 och 11 är primtal. $6 = 2 \cdot 3$ är inte ett primtal.

Observera att 1 inte är ett primtal.

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \ldots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \ldots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \ldots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \ldots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r.

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \ldots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \ldots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r. Talet m_i är *multipliciteten* av p_i.

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \dots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \dots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r. Talet m_i är *multipliciteten* av p_i.

Primtalen är atomer som bygger upp de rationella talen.

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \ldots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \ldots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r. Talet m_i är *multipliciteten* av p_i.

Primtalen är atomer som bygger upp de rationella talen.

Anmärkningar:

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \dots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \dots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r. Talet m_i är *multipliciteten* av p_i.

Primtalen är atomer som bygger upp de rationella talen.

Anmärkningar:

- Multipliciteterna kan vara negativa.

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \ldots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \ldots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r. Talet m_i är *multipliciteten* av p_i.

Primtalen är atomer som bygger upp de rationella talen.

Anmärkningar:

- Multipliciteterna kan vara negativa.
- Satsen gäller bara för rationella tal.

Sats: (Aritmetikens fundamentalsats) *Om r är ett positivt rationellt tal så finns det unika primtal $p_1, \ldots, p_k$ och nollskilda heltal $m_1, \ldots, m_k$ så att*

$$r = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Uttrycket $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ kallas för *primtalsfaktoriseringen* av r. Talet m_i är *multipliciteten* av p_i.

Primtalen är atomer som bygger upp de rationella talen.

Anmärkningar:

- Multipliciteterna kan vara negativa.
- Satsen gäller bara för rationella tal.
- De

Exempel: Talet $4/15$ har primtalsfaktoriseringen $2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}$.

Exempel: Talet $4/15$ har primtalsfaktoriseringen $2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}$.

Unikhet betyder att ifall

$$p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = q_1^{n_1} \cdots q_l^{n_l}$$

är primtalsfaktoriseringar, så är $l = k$, och indexen kan ordnas så att $q_i = p_i$ och $m_i = n_i$ för alla $1 \leq i \leq k$.

Exempel: Talet $4/15$ har primtalsfaktoriseringen $2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}$.

Unikhet betyder att ifall

$$p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = q_1^{n_1} \cdots q_l^{n_l}$$

är primtalsfaktoriseringar, så är $l = k$, och indexen kan ordnas så att $q_i = p_i$ och $m_i = n_i$ för alla $1 \leq i \leq k$.

Om 1 var ett primtal vore inte faktoriseringen unik.

Exempel: Talet $4/15$ har primtalsfaktoriseringen $2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}$.

Unikhet betyder att ifall

$$p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = q_1^{n_1} \cdots q_l^{n_l}$$

är primtalsfaktoriseringar, så är $l = k$, och indexen kan ordnas så att $q_i = p_i$ och $m_i = n_i$ för alla $1 \leq i \leq k$.

Om 1 var ett primtal vore inte faktoriseringen unik.

$$\frac{3}{4} = 2^2 \cdot 3^{-1} = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^{-1}$$

En konsekvens av aritmetikens fundamentalsats är följande.

En konsekvens av aritmetikens fundamentalsats är följande.

Sats: *Om r_1 och r_2 är två positiva rationella tal som uppfyller $r_1^n = r_2^m$ för två heltal m och n, så finns det ett rationellt tal r så att $r^m = r_1$ och $r^n = r_2$.*

En konsekvens av aritmetikens fundamentalsats är följande.

Sats: *Om r_1 och r_2 är två positiva rationella tal som uppfyller $r_1^n = r_2^m$ för två heltal m och n, så finns det ett rationellt tal r så att $r^m = r_1$ och $r^n = r_2$.*

Satsen säger att om r_1 och r_2 är positiva rationella tal, så inträffar ett av följande.

1. r_1 och r_2 saknar gemensamma rötter.

En konsekvens av aritmetikens fundamentalsats är följande.

Sats: *Om r_1 och r_2 är två positiva rationella tal som uppfyller $r_1^n = r_2^m$ för två heltal m och n, så finns det ett rationellt tal r så att $r^m = r_1$ och $r^n = r_2$.*

Satsen säger att om r_1 och r_2 är positiva rationella tal, så inträffar ett av följande.

1. r_1 och r_2 saknar gemensamma rötter.
2. r_1 och r_2 har minst en gemensam rationell rot.

En konsekvens av aritmetikens fundamentalsats är följande.

Sats: *Om r_1 och r_2 är två positiva rationella tal som uppfyller $r_1^n = r_2^m$ för två heltal m och n, så finns det ett rationellt tal r så att $r^m = r_1$ och $r^n = r_2$.*

Satsen säger att om r_1 och r_2 är positiva rationella tal, så inträffar ett av följande.

1. r_1 och r_2 saknar gemensamma rötter.
2. r_1 och r_2 har minst en gemensam rationell rot.

Två rationella tal kan inte enbart ha irrationella gemensamma rötter.

Beviset bygger på unikheten i primtalsfaktoriseringen.

Beviset bygger på unikheten i primtalsfaktoriseringen.

Bevisidé: 1. Visa att vi kan anta att n och m saknar gemensamma delare.

Beviset bygger på unikheten i primtalsfaktoriseringen.

Bevisidé: 1. Visa att vi kan anta att n och m saknar gemensamma delare.

2. Primtalsfaktorisera r_1 och r_2:

$$r_1 = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} \quad \text{och} \quad r_2 = q_1^{n_1} \cdots q_l^{n_l}.$$

Beviset bygger på unikheten i primtalsfaktoriseringen.

Bevisidé: 1. Visa att vi kan anta att n och m saknar gemensamma delare.

2. Primtalsfaktorisera r_1 och r_2:

$$r_1 = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} \quad \text{och} \quad r_2 = q_1^{n_1} \cdots q_l^{n_l}.$$

3. Sätt in faktoriseringarna i ekvationen och få

$$\begin{aligned} & (p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k})^n = (q_1^{n_1} \cdots q_l^{n_l})^m \\ \Leftrightarrow \quad & p_1^{m_1 n} \cdots p_k^{m_k n} = q_1^{n_1 m} \cdots q_l^{n_l m}. \end{aligned}$$

4. Eftersom

$$p_1^{m_1 n} \cdots p_k^{m_k n} = q_1^{n_1 m} \cdots q_l^{n_l m}$$

och primtalsfaktoriseringen är unik så är $k = l$, $p_i = q_i$ och $m_i n = n_i m$ för alla $i = 1, \ldots, k$.

4. Eftersom

$$p_1^{m_1 n} \cdots p_k^{m_k n} = q_1^{n_1 m} \cdots q_l^{n_l m}$$

och primtalsfaktoriseringen är unik så är $k = l$, $p_i = q_i$ och $m_i n = n_i m$ för alla $i = 1, \ldots, k$.

5. Visa att eftersom n och m saknar gemensamma delare så finns det för alla $i = 1, \ldots, k$ ett tal k_i så att $n_i = k_i n$ (dvs n delar n_i.)

4. Eftersom

$$p_1^{m_1 n} \cdots p_k^{m_k n} = q_1^{n_1 m} \cdots q_l^{n_l m}$$

och primtalsfaktoriseringen är unik så är $k = l$, $p_i = q_i$ och $m_i n = n_i m$ för alla $i = 1, \ldots, k$.

5. Visa att eftersom n och m saknar gemensamma delare så finns det för alla $i = 1, \ldots, k$ ett tal k_i så att $n_i = k_i n$ (dvs n delar n_i.)

6. Sätt

$$r = q_1^{k_1} \ldots q_l^{k_l}.$$

och verifiera att r är en gemensam rot till r_1 och r_2.

Det sistnämnda sker i två steg.

Det sistnämnda sker i två steg.

Steg 1: Visa att $r^n = r_2$.

$$r^n = \left(q_1^{k_1} \dots q_l^{k_l}\right)^n = q_1^{k_1 n} \dots q_l^{k_l n} = q_1^{n_1} \dots q_l^{n_l} = r_2$$

där vi använder att $k_i n = n_i$.

Det sistnämnda sker i två steg.

Steg 1: Visa att $r^n = r_2$.

$$r^n = \left(q_1^{k_1} \dots q_l^{k_l}\right)^n = q_1^{k_1 n} \dots q_l^{k_l n} = q_1^{n_1} \dots q_l^{n_l} = r_2$$

där vi använder att $k_i n = n_i$.

Steg 2: Visa att $r^m = r_1$.

$$r_1^n = r_2^m = (r^n)^m = (r^m)^n \implies r_1 = r^m.$$

Det sistnämnda sker i två steg.

Steg 1: Visa att $r^n = r_2$.

$$r^n = \left(q_1^{k_1} \dots q_l^{k_l}\right)^n = q_1^{k_1 n} \dots q_l^{k_l n} = q_1^{n_1} \dots q_l^{n_l} = r_2$$

där vi använder att $k_i n = n_i$.

Steg 2: Visa att $r^m = r_1$.

$$r_1^n = r_2^m = (r^n)^m = (r^m)^n \implies r_1 = r^m.$$

Talet r är alltså en gemensam, rationell rot till r_1 och r_2.

Ovanstående sats är nyckeln för att bevisa följande sats.

Ovanstående sats är nyckeln för att bevisa följande sats.

Sats: *Om T är ett ändligt underdelat, slutet och rent tonsystem så finns det ett rationellt tal I så att $T = T(I)$.*

Ovanstående sats är nyckeln för att bevisa följande sats.

Sats: *Om T är ett ändligt underdelat, slutet och rent tonsystem så finns det ett rationellt tal I så att $T = T(I)$.*

Grundtanken är att om systemet är ändligt underdelat, slutet och rent, så måste varje par av intervall ha en gemensam rationell rot. Denna rot genererar T.

Ovanstående sats är nyckeln för att bevisa följande sats.

Sats: *Om T är ett ändligt underdelat, slutet och rent tonsystem så finns det ett rationellt tal I så att $T = T(I)$.*

Grundtanken är att om systemet är ändligt underdelat, slutet och rent, så måste varje par av intervall ha en gemensam rationell rot. Denna rot genererar T.

Men det finns ett problem. Intervall kan ha flera gemensamma rationella rötter, och alla genererar inte tonsystemet.

Exempel: Tonsystemet $T(2)$ innehåller bland annat 16 och 64.

Exempel: Tonsystemet $T(2)$ innehåller bland annat 16 och 64.

En gemensam rot för 16 och 64 är 4.

$$4^2 = 16 \quad \text{och} \quad 4^3 = 64.$$

Exempel: Tonsystemet $T(2)$ innehåller bland annat 16 och 64.

En gemensam rot för 16 och 64 är 4.

$$4^2 = 16 \quad \text{och} \quad 4^3 = 64.$$

Men $T(2) \neq T(4)$, t.ex kan inte $8 = 2^3$ skrivas på formen 4^n.

Exempel: Tonsystemet $T(2)$ innehåller bland annat 16 och 64.

En gemensam rot för 16 och 64 är 4.

$$4^2 = 16 \quad \text{och} \quad 4^3 = 64.$$

Men $T(2) \neq T(4)$, t.ex kan inte $8 = 2^3$ skrivas på formen 4^n.

Vi kan alltså inte ta vilken gemensam rot som helst.

Exempel: Tonsystemet $T(2)$ innehåller bland annat 16 och 64.

En gemensam rot för 16 och 64 är 4.

$$4^2 = 16 \quad \text{och} \quad 4^3 = 64.$$

Men $T(2) \neq T(4)$, t.ex kan inte $8 = 2^3$ skrivas på formen 4^n.

Vi kan alltså inte ta vilken gemensam rot som helst.

Det behövs en rot som fungerar för **alla** intervallpar.

Exempel: Tonsystemet $T(2)$ innehåller bland annat 16 och 64.

En gemensam rot för 16 och 64 är 4.

$$4^2 = 16 \quad \text{och} \quad 4^3 = 64.$$

Men $T(2) \neq T(4)$, t.ex kan inte $8 = 2^3$ skrivas på formen 4^n.

Vi kan alltså inte ta vilken gemensam rot som helst.

Det behövs en rot som fungerar för **alla** intervallpar. Detta kallas för en *primitiv* rationell rot.

Nyckeln är att visa att de gemensamma rötterna av två rationella tal har formen

$$r, r^2, r^3, \ldots, r^m$$

där r ett rationellt tal.

Nyckeln är att visa att de gemensamma rötterna av två rationella tal har formen

$$r, r^2, r^3, \dots, r^m$$

där r ett rationellt tal. Talet r är den primitiva rationella roten.

Nyckeln är att visa att de gemensamma rötterna av två rationella tal har formen

$$r, r^2, r^3, \ldots, r^m$$

där r ett rationellt tal. Talet r är den primitiva rationella roten.

Exempel: $64 = 8^2$ och $512 = 8^3$ har de gemensamma rötterna 2, $2^2 = 4$ och $2^3 = 8$.

Nyckeln är att visa att de gemensamma rötterna av två rationella tal har formen

$$r, r^2, r^3, \ldots, r^m$$

där r ett rationellt tal. Talet r är den primitiva rationella roten.

Exempel: $64 = 8^2$ och $512 = 8^3$ har de gemensamma rötterna 2, $2^2 = 4$ och $2^3 = 8$.

Se kompendiet för detaljerna!

Följdsats: *Det enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemet som innehåller intervallet* 2 *(oktaven) är* $T(2)$.

Följdsats: *Det enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemet som innehåller intervallet* 2 *(oktaven) är* $T(2)$*.*

Bevis: Anta att T är ändligt underdelat, rent och slutet och innehåller 2.

Följdsats: *Det enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemet som innehåller intervallet* 2 *(oktaven) är* $T(2)$.

Bevis: Anta att T är ändligt underdelat, rent och slutet och innehåller 2. Då är $T = T(l)$ för något rationellt tal l, och $l^n = 2$ för något heltal n.

Följdsats: *Det enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemet som innehåller intervallet* 2 *(oktaven) är* $T(2)$.

Bevis: Anta att T är ändligt underdelat, rent och slutet och innehåller 2. Då är $T = T(I)$ för något rationellt tal I, och $I^n = 2$ för något heltal n.

Primtalsfaktorisera $I = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ och sätt in i ekvationen:

$$I^n = 2 \iff p_1^{nm_1} \cdots p_k^{nm_k} = 2^1$$

Följdsats: *Det enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemet som innehåller intervallet* 2 *(oktaven) är* $T(2)$.

Bevis: Anta att T är ändligt underdelat, rent och slutet och innehåller 2. Då är $T = T(I)$ för något rationellt tal I, och $I^n = 2$ för något heltal n.

Primtalsfaktorisera $I = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ och sätt in i ekvationen:

$$I^n = 2 \iff p_1^{nm_1} \cdots p_k^{nm_k} = 2^1$$

Eftersom 2 är ett primtal är $k = 1$, $p_1 = 2$ och $m_1 n = 1$.

Följdsats: *Det enda rena, ändligt underdelade och slutna tonsystemet som innehåller intervallet 2 (oktaven) är $T(2)$.*

Bevis: Anta att T är ändligt underdelat, rent och slutet och innehåller 2. Då är $T = T(I)$ för något rationellt tal I, och $I^n = 2$ för något heltal n.

Primtalsfaktorisera $I = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ och sätt in i ekvationen:

$$I^n = 2 \iff p_1^{nm_1} \cdots p_k^{nm_k} = 2^1$$

Eftersom 2 är ett primtal är $k = 1$, $p_1 = 2$ och $m_1 n = 1$. Alltså är $I = 2$ eller $I = 1/2$. Oavsett vilket får vi

$$T = T(2) = T(2^{-1}).$$

Liksvävig temperatur

För att hitta ett tonsystem som innehåller oktaven och ytterligare intervall måste vi överge slutenhet, ändlig underdelning eller renhet.

Liksvävig temperatur

För att hitta ett tonsystem som innehåller oktaven och ytterligare intervall måste vi överge slutenhet, ändlig underdelning eller renhet.

- Att ta bort slutenhet innebär att musiken inte kan transponeras.

Liksvävig temperatur

För att hitta ett tonsystem som innehåller oktaven och ytterligare intervall måste vi överge slutenhet, ändlig underdelning eller renhet.

- Att ta bort slutenhet innebär att musiken inte kan transponeras.
- Att ta bort ändlig underdelning innebär att man endast kan använda instrument med fri intonering.

Liksvävig temperatur

För att hitta ett tonsystem som innehåller oktaven och ytterligare intervall måste vi överge slutenhet, ändlig underdelning eller renhet.

- Att ta bort slutenhet innebär att musiken inte kan transponeras.
- Att ta bort ändlig underdelning innebär att man endast kan använda instrument med fri intonering.
- Att ta bort renhet innebär att man använder irrationella intervall.

Sedan 1800-talet använder man i europeisk och amerikansk musik det *liksvävigt tempererade tolvtonsystemet*, som bygger på irrationella intervall. För att definiera det använder man *cent*.

Sedan 1800-talet använder man i europeisk och amerikansk musik det *liksvävigt tempererade tolvtonsystemet*, som bygger på irrationella intervall. För att definiera det använder man *cent*.

Om I är ett intervall i ett tonsystem, så är dess värde i cent lika med

$$1200 \cdot \log_2(I).$$

Sedan 1800-talet använder man i europeisk och amerikansk musik det *liksvävigt tempererade tolvtonsystemet*, som bygger på irrationella intervall. För att definiera det använder man *cent*.

Om I är ett intervall i ett tonsystem, så är dess värde i cent lika med

$$1200 \cdot \log_2(I).$$

För att uttrycka ett intervall i cent som ett förhållande mellan frekvenser, så används formeln

$$I = 2^{c/1200}.$$

Oktaven (2) motsvarar 1200 cent, eftersom

$$1200 \cdot \log_2(2) = 1200 \text{ cent}.$$

Oktaven (2) motsvarar 1200 cent, eftersom

$$1200 \cdot \log_2(2) = 1200 \text{ cent.}$$

Den stora tersen (5/4) motsvarar

$$1200 \cdot \log_2(5/4) \approx 386 \text{ cent.}$$

Oktaven (2) motsvarar 1200 cent, eftersom

$$1200 \cdot \log_2(2) = 1200 \text{ cent.}$$

Den stora tersen (5/4) motsvarar

$$1200 \cdot \log_2(5/4) \approx 386 \text{ cent.}$$

Tolvtonsystemet delar upp oktaven i 12 steg á 100 cent.

Oktaven (2) motsvarar 1200 cent, eftersom

$$1200 \cdot \log_2(2) = 1200 \text{ cent.}$$

Den stora tersen (5/4) motsvarar

$$1200 \cdot \log_2(5/4) \approx 386 \text{ cent.}$$

Tolvtonsystemet delar upp oktaven i 12 steg á 100 cent. Stegen kallas för *halvtoner*. Två halvtoner är en *helton*.

Oktaven (2) motsvarar 1200 cent, eftersom

$$1200 \cdot \log_2(2) = 1200 \text{ cent.}$$

Den stora tersen (5/4) motsvarar

$$1200 \cdot \log_2(5/4) \approx 386 \text{ cent.}$$

Tolvtonsystemet delar upp oktaven i 12 steg á 100 cent.
Stegen kallas för *halvtoner*. Två halvtoner är en *helton*.

Varje steg har ett eget namn, och toner som är en oktav ifrån varandra heter samma sak.

Namn	Cent	Alt. namn	Uttal
A	0		A
$A^{\#}$	100	B^b	Aiss/Bess
B	200		B
C	300		C
$C^{\#}$	400	D^b	Ciss/Dess
D	500		D
$D^{\#}$	600	E^b	Diss/Ess
E	700		E
F	800		F
$F^{\#}$	900	G^b	Fiss/Gess
G	1000		G
$G^{\#}$	1100	A^b	Giss/Ass
A	1200		A

Systemet också beskrivas som

$$\left\{ \left(\sqrt[12]{2} \right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} = T(\sqrt[12]{2}).$$

Systemet också beskrivas som

$$\left\{ \left(\sqrt[12]{2} \right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} = T(\sqrt[12]{2}).$$

Tolvtonssystemet är slutet, ändligt underdelat och innehåller oktaven, men inte rent eftersom $\sqrt[12]{2}$ är irrationellt.

Systemet också beskrivas som

$$\left\{ \left(\sqrt[12]{2} \right)^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} = T(\sqrt[12]{2}).$$

Tolvtonssystemet är slutet, ändligt underdelat och innehåller oktaven, men inte rent eftersom $\sqrt[12]{2}$ är irrationellt.

För att bestämma vilka frekvenser som ingår multiplicerar man alla intervall med en grundfrekvens, vanligtvis 440 Hertz.

Ton	Rent (Hz)	Liksvävig (Hz)	Skillnad
A	440	440	0
$A^{\#}$	469	466	3
B	495	494	1
C	528	523	5
$C^{\#}$	550	554	-4
D	587	587	-1
$D^{\#}$	611	622	-11
E	660	659	1
F	704	698	6
$F^{\#}$	733	740	-7
G	792	784	8
$G^{\#}$	825	831	-6
A	880	880	0

Skalor

En *skala* består av ett antal toner i oktaven.

Skalor

En *skala* består av ett antal toner i oktaven.

Den bestäms genom att specificera en grundton och avståndet mellan tonerna i halvtoner upp till nästa oktav.

Skalor

En *skala* består av ett antal toner i oktaven.

Den bestäms genom att specificera en grundton och avståndet mellan tonerna i halvtoner upp till nästa oktav.

I tolvtonssystemet spelar grundtonen inte någon större roll. Därför specificerar man bara avstånden mellan tonerna.

De vanligaste skalorna är dur- och mollskalan.

De vanligaste skalorna är dur- och mollskalan.

Definition: *Durskalan* består av en grundton samt avstånden 2-2-1-2-2-2-1.

De vanligaste skalorna är dur- och mollskalan.

Definition: *Durskalan* består av en grundton samt avstånden 2-2-1-2-2-2-1.

Exempel: I C så är durskalan C-D-E-F-G-A-B.

De vanligaste skalorna är dur- och mollskalan.

Definition: *Durskalan* består av en grundton samt avstånden 2-2-1-2-2-2-1.

Exempel: I C så är durskalan C-D-E-F-G-A-B.

Definition: *Mollskalan* består av en grundton samt avstånden 2-1-2-2-1-2-2.

De vanligaste skalorna är dur- och mollskalan.

Definition: *Durskalan* består av en grundton samt avstånden 2-2-1-2-2-2-1.

Exempel: I C så är durskalan C-D-E-F-G-A-B.

Definition: *Mollskalan* består av en grundton samt avstånden 2-1-2-2-1-2-2.

Exempel: I C så är mollskalan C-D-E^b-F-G-A^b-B^b.

De vanligaste skalorna är dur- och mollskalan.

Definition: *Durskalan* består av en grundton samt avstånden 2-2-1-2-2-2-1.

Exempel: I C så är durskalan C-D-E-F-G-A-B.

Definition: *Mollskalan* består av en grundton samt avstånden 2-1-2-2-1-2-2.

Exempel: I C så är mollskalan C-D-E^b-F-G-A^b-B^b.

I kompendiet står det också om ackord och treklanger.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (18/2). Det är ett övningstillfälle.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (18/2). Det är ett övningstillfälle.

Nästa föreläsning är om fem veckor (11/3). Då kommer vi prata om den diskreta Fouriertransformen.