Föreläsning 7: Linjär algebra för gymnasister.

Elementära matriser.

"Mål: matrisinvers"

Vad gjorde vi sist?

·) Gauss-Jordan elimination.

Elementära radoperationer:

→ multiplicera en rad med ett nollskilt tal.

→ Byta plats på rader.

→ Addera till en given rad en multipel av en annan.

Notera: Elementära radoperationer ändrar inte lösningsmängden!

Exempel: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+2z=1 \\ 2x+y+z=2. \end{cases}$$

Lösning: Totalmatris:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Vi radreducerar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = -1. \end{cases}$$

(kontrollera)

Kan vi representera varderna operation ovan med hjälp av matrismultiplikation?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

-2

Viktig observation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Låt oss undersöka vidare:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Om $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ identitetsmatrisen. $EA = A$. Inget intressant händer.

Tag t.ex. $E_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1,1). Då blir

$$E_1(k) \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 & k \cdot a_2 & k \cdot a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Tag $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Då är

$$\underline{E_{2,3}\, A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Tag slutligen

$$\boxed{\underline{E_{1,3}(k)} = \begin{array}{c} (1,3) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

$$E_{1,3}(k)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + k \cdot c_1 & a_2 + k \cdot c_2 & a_3 + k \cdot c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Dessa 3 matriser verkar representera våra elementära radoperationer !

<u>Definition</u>. De elementära matriserna är följande $n \times n$-matriserna:

(i) Låt $E_i(k)$ vara den matris man får om man byter ut diagonalelementet (i,i) mot k i identitetsmatrisen.

Ex: Låt $n=4$, $i=2$, $k=3$

$$E_i(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Låt $E_{i,j}$ med $i \neq j$ vara den matris man erhåller genom att byta plats på rad i och rad j.

(iii) Låt $E_{i,j}(k)$ där $i \neq j$ vara matrisen vi får genom att byta ut elementet (i,j) med k.

Exempel: $n=5$:

$$E_{2,4}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SATS. 7.1.5. Låt A vara en $n \times n$-matris. Att utföra en elementär radoperation på matrisen A är detsamma som att multiplicera A från vänster med en elementär matris. mer precist:

$AB \neq BA$

(a) Att multiplicera A med $E_i(k)$ från vänster $\Longleftrightarrow$ multiplicera rad i med k.

(b) $E_{ij} A \iff$ byta plats på rad i och rad j i A.

(c) $E_{ij}(k) A \iff$ till raden i av A addera $k \cdot$ gånger raden j av A.

Bevis. Övning.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & k & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow (i,i)$$

Recap:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2} E_{3,1}(-2)A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1} E_{1,2}(-1)E_{3,1}(-2)A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{1} E_{3,2}(1)E_{1,2}(-1)E_{3,1}(-2)A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}} E_3(1/3)E_{3,2}(1)E_{1,2}(-1)E_{3,1}(\cancel{-2})A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2,\,-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Låt

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

$$E_{3,1}(-2)\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$E_{1,2}(-1)\, E_{3,1}(-2) A$$

Tag (-1) gånger rad 2 och addera till rad 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$E_{1,3}(2)\, E_{2,3}(-2)\, E_3(1/3)\, E_{1,2}(-1)\, E_{3,2}(1)\, E_{3,2}(-2)\, A$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Anmärkning: Ordningen är viktig.

Varför gör vi detta? Jo, det hjälper oss att konstruera en matrisinvers!

Kom ihåg:

Definition. En matris A kallas inverterbar om det finns en matris B så att $AB = E$ och $BA = E$.

Att finna inversen till en elementär matris är ett betydligt enklare problem.

SATS. 7.18 Varje elementär matris är inverterbar med inverser:

(i) $E_i(k)^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$. $(k \neq 0)$

(ii) $E_{i,j}^{-1} = E_{ij}$ "lätt tillbaka"

(iii) $E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k)$

Bevis. (i) För att visa att $E_i(\frac{1}{k})$ är inversen till $E_i(k)$ så måste vi visa att $E_i(\frac{1}{k})E_i(k) = I$ och $E_i(k)E_i(\frac{1}{k}) = I$.

Betrakta $E_i(\frac{1}{k}) \cdot E_i(k)$. Att multiplicera med $E_i(\frac{1}{k})$ är samma sak som att multiplicera rad i med $\frac{1}{k}$. Och på rad i hos $E_i(k)$ finns en faktor k, per definition. Eftersom $\frac{1}{k} \cdot k = 1$ är $E_i(\frac{1}{k}) \cdot E_i(k) = E$. Liknande för $E_i(k) \cdot E_i(\frac{1}{k})$.

□

$$E_i(\tfrac{1}{k}) \cdot E_i(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1/k & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E_i(1/k)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & k & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E_i(k)}$$

rad$_i$ a$_i$ rad$_i$

(ii) och (iii) är liknande. (övning)

Kan vi konstruera en matrisinvers?

Låt $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Då är

vet inverserna

$$E_{1,3}(2)\,E_{2,3}(-2)\,E_3(\tfrac{1}{3})\,E_{1,2}(-1)\,E_{3,2}(1)\,E_{3,2}(-2)\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Låt $X = E_{1,3}(2)\,E_{2,3}(-2)\,E_3(\tfrac{1}{3})\,E_{1,2}(-1)\,E_{3,2}(1)\,E_{3,2}(-2)$

då är $X \cdot B = E$. Vi måste även ha

$B \cdot X = E$.

Från (*) följer att

$$E_{2,3}(-2)\,E_3(\tfrac{1}{3})\,E_{1,2}(-1)\,E_{3,2}(1)\,E_{3,2}(-2)\,B = E_{1,3}(-2)$$

si $B = \ldots = E_{2,3}(2)\, E_{3,2}(-1)\, E_{1,2}(1)\, E_3(J)\, E_{2,3}(2)$
$E_{1,3}(-2)$.

$\Rightarrow BX = E$