Föreläsning 8: Liniär algebra för gymnasister

Förra gången:

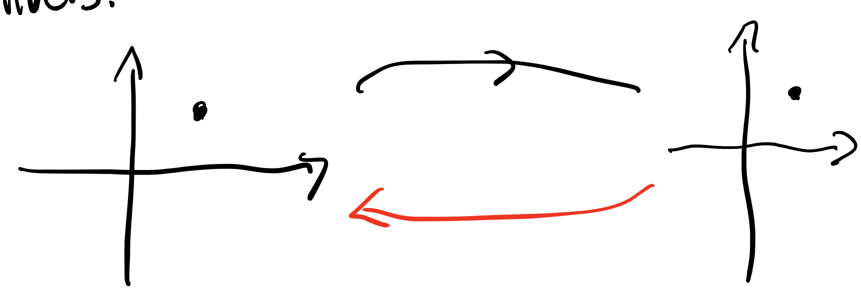
Temat var elementära matriser.
Vi såg att radoperationer på en matris kan uttryckas med hjälp av elementära matriser, t.ex.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{multiplicera rad 1 med 2.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{byter plats på rad 2 och 3.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Adderar 4 · rad 3 till rad 1.}$$

Målet var att bygga upp teori för att skapa en matrisinvers.



Kom ihåg:

Definition. En matris A kallas inverterbar om det finns en matris B så att $AB = I$ och $BA = I$. (5.5 t 1)

Exempel: Tag $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ och betrakta $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$. Då är B inversen till A ty

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

och

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Gör beräkningarna själva)

Vi börjar med en sats.

SATS. Låt A vara en $n \times n$ matris. Då är följande påståenden ekvivalenta:

(i) det finns en $n \times n$ matris B så att $BA = I$.

(ii) Den enda $(n \times 1)$ matris X som löser $AX = 0$ är $X = 0$.

(iii) Matrisen A kan skrivas som en produkt av elementära matriser.

[$A \Longleftrightarrow B$ betyder $\underbrace{A \Rightarrow B}$ och $B \Rightarrow A$.]

"Om A är sann så är B sann"

Bevis. Vi vill visa att $\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)}$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Antag att (i) gäller, dvs. det finns en matris B så att $BA = I$. Studera ekvationen

$$AX = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{BA}_{I} X = \underbrace{B \cdot 0}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad X = 0.$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$. Antag att (ii) är sann, dvs. antag att enda matrisen X som löser $AX=0$ är $X=0$. Låt R vara den reducerade trappstegsformen till A.

$$A \xmapsto{E_1} A_1 \xmapsto{E_2} A_2 \xmapsto{E_3} \cdots \xmapsto{E_k} R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longmapsto \cdots \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då gäller att (från förra föreläsningen)

elementära matriser

$$\underline{F_s F_{s-1} \dots F_2 F_1 A = R}$$

Men vi visade även förra gången att elementära matriser är inverterbara. Så

$$F_s F_{s-1} \dots F_2 F_1 A = R$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_s^{-1} F_s}_{I} F_{s-1} \dots F_2 F_1 A = F_s^{-1} R$$

$$\Rightarrow F_{s-1} \dots F_2 F_1 A = F_s^{-1} R.$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow A = \underbrace{F_1^{-1} F_2^{-1} \dots F_s^{-1} \boxed{R}}_{\text{Nästan en produkt av elementära matriser!}} \quad *$$

Är R identitetsmatrisen?

Lemma. Låt A vara en $n \times n$ matris och låt r vara det maximala tal så att den radreducerade trappstegsformen R (reduced row echelon form) innehåller en $(r \times r)$-identitetsmatris som ett block i sitt vänstra övre hörn. Om $r = n$ så är $R = I$ och annars kan vi skriva R som följande:

r+1 kolumnen

$n \times n$

$$R = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & * & * \\ 0 & 1 & 0\cdots & 0 & b_{2,r+1} & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & b_{3,r+1} & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r,r+1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \quad n$$

n

EX: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ex2, $b_{1,3}$, $b_{2,3}$

Beviset av lemmat: "Gauss Jordan elliminnation."

kom ihåg vad vi antog !! Att $A\bar{X} = 0$ endast har lösningen $\bar{X} = 0$. (OBS, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$A\bar{X} = F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_s^{-1} \boxed{R\bar{X}}$$

med

$$R = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & * & * \\ 0 & 1 & 0\cdots & 0 & b_{2,r+1} & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & b_{3,r+1} & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{r,r+1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Välj $\bar{X} = \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\leftarrow$ nollskild.

Då är

$$= \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} + b_{1,r+1} \\ -b_{2,r+1} + b_{2,r+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(*)

$$RX = 0$$

Så då är $AX = 0$ också. Observera att det X vi valde är ~~n~~ nollskild och enligt antagandet kan detta ej ske. (ty $X = 0$ skulle vara enda lösningen). Då måste $r = n$ och då är $R = I$. Då följer det att

$$A = F_1^{-1} F_2^{-1} \dots F_s^{-1} R = F_1^{-1} \dots F_s^{-1},$$

Så A är en produkt av elementära matriser!

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Antag att (iii) gäller dvs. att A kan skrivas som en produkt av elementära matriser.

$$A = E_1 E_2 \dots E_s,$$

där E_i är elementär. Har nu A en vänsterinvers? Tag

$$B = E_s^{-1} E_{s-1}^{-1} \dots E_1^{-1}!$$

$$\Rightarrow \quad BA = E_s^{-1} E_{s-1}^{-1} \dots \underbrace{\underbrace{E_1^{-1} E_1}_{I} E_2}_{} \dots E_s$$

$$= \dots = I.$$

Q.E.D.

Korollarium. Låt A vara en $n \times n$ matris. Om det finns en $(n\times n)$ matris B så att $BA = I$, då är $AB = I$.

Bevis. Från (i) ⇒ (iii) kan A skrivas som

$$A = E_1 \dots E_s$$

och

$$BA = B E_1 E_2 \dots E_s = I$$

$$\Rightarrow \quad B = E_s^{-1} E_{s-1}^{-1} \dots E_1^{-1}.$$

så

$$AB = \underbrace{E_1 E_2 \dots E_s}_{A} E_s^{-1} E_{s-1}^{-1} \dots E_1^{-1} = I.$$

(with $E_s E_s^{-1} = I$)

Q.E.D.

Konstruktion av matrisinversen

Vi såg tidigare att matrisen A är inverterbar om och endast om

$$(*) \quad \boxed{\boxed{F_s F_{s-1} \dots F_2 F_1} A = I} \quad R$$

$$\rightarrow \quad A^{-1} = F_s F_{s-1} \dots F_2 F_1.$$

$E_1 E_2 E_3 \dots E_s I = A$

För att finna inversen till A kan vi utföra elementära radoperationer.

$$(A \mid I) \xrightarrow{E_1} (E_1 A \mid E_1 \cdot I) \xrightarrow{E_2} (E_2 E_1 A \mid E_2 E_1 I)$$

$$\to \dots \to (\underbrace{E_s \dots E_1 A}_{I} \mid \underbrace{E_s E_{s-1} \dots E_1}_{A^{-1}})$$

Exempel: Finn inversen till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(-2)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim (-3)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(-2)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim (-3)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right) \sim (-1)\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

$$\underbrace{}_{I} \qquad A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Kontrollera att man gjort rätt.

$A^{-1}A = I$

Exempel: Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Lösning: Frågan är att visa att inversen till AB är $B^{-1}A^{-1}$. Vi kollar att deras produkt är I.

$$\rightarrow A\underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I}A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I.$$

och

$$\rightarrow B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B = B^{-1}IB = B^{-1} \cdot B = I.$$

$\square$

($(A^{-1})^{-1} = A$ kan visas med hjälp av $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.)