

Föreläsning 10^{-t} i linjär algebra för gymnasister

Vad gjorde vi förra gången?

Vi definierade begreppet determinant för en kvadratisk $n \times n$ matris.

Kom ihåg:

Definition. Låt $A = (a_{i,j})$ vara en $n \times n$ matris. Determinanten av A definieras som tal

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

där $S_n = S_n$ är den symmetriska gruppens av n element och sign) definieras av

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{om antalet inversioner är jämna} \\ -1 & \text{om antalet inversioner är udda.} \end{cases}$$

(En involution är ett talpar (i,j) med $1 \leq i < j \leq n$ så att $\sigma(i) > \sigma(j)$ för en permutation σ på $\{1, \dots, n\}$.)

-2-

Idag fortsätter vi på det späret. Vi
ska nämligen prata om egenskaper hos
determinanten. Låt oss börja med lite
teori:

Inversioner

Definition. Betrakta mängden av alla
permutationer av talen $\{1, \dots, n\}$, dvs $\tilde{\sigma}_n$.
H talpar $1 \leq i < j \leq n$, $i \neq j$ har vi
permutationen

$$\tilde{\sigma}_{ij}(p) = \begin{cases} p & \text{om } i \neq p, p \neq j \\ i & \text{om } p = j \\ j & \text{om } p = i. \end{cases}$$

Denna permutation kallas för en **transposition**.

Exempel: $\tilde{\sigma}_{12} \in \tilde{\sigma}_4$ | $\tilde{\sigma}_{35} \in \tilde{\sigma}_5$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad \left| \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{array} \right) \right.$$

Lemma. (Hjälsats)

För varje permutation $\sigma \in S_n$ och
varje transposition τ_{ij} har vi att

$$\text{sign}(\sigma \tau_{ij}) = - \underline{\text{sign}(\sigma)}.$$

Beweis. Uppgifterna.

Detta lemma leder oss till följande
rättsregler.

SATS. Låt A vara en $n \times n$ matris.

Determinanten har följande egenskaper:

$$(i). \det(C \cdot A) = C \cdot \det A$$

(ii). Om två rader i A är lika så
är $\det A = 0$.

(iii). Ifall rad P i A kan skrivas som

$$a_{P,k} = b_{P,k} + c_{P,k}$$

då har vi

$$\xrightarrow[\text{mod } P]{\quad} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{P1} + c_{P1} & b_{P2} + c_{P2} & \dots & b_{Pn} + c_{Pn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{P1} & b_{P2} & \dots & b_{Pn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{P1} & c_{P2} & \dots & c_{Pn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis. (i). Vi vill visa $\det(c \cdot A) = c \cdot \det A$.

$$\det(c \cdot A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ c \cdot a_{P1} & \dots & c \cdot a_{Pn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} P$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) a_1 \sigma(1) a_2 \sigma(2) \dots a_P \sigma(P) \cdot \underbrace{(c \cdot a_{P1} c_{P2} \dots c_{Pn})}_{a_{n\sigma(n)}}$$

$$a_{n\sigma(n)} = c \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sign}(\sigma) a_1 \sigma(1) \dots a_n \sigma(n)$$

$$= c \cdot \det A.$$

(iii) Visas på analogt sett. (Ettning)

(ii) Vi vill visa att om två rader i A är lika så är $\det A = 0$.

Testa: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ då är

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0, \text{ Ok.}$$

(Man kan visa allmänna fallet med induktion).

Låt rad i och rad j vara lika,

dns. $a_{iu} = a_{ju} \quad \forall u = 1, \dots, n.$

$$i \rightarrow \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

Vi vill visa att

$$\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma_1} \dots a_{n\sigma_n} \stackrel{!}{=} 0.$$

Ide: Visa att varje term förekommer två gånger fast med olika tecken.

Fixera en permutation σ och betrakta

$$\tilde{\sigma}(p) = \begin{cases} \underline{\sigma(p)} & \text{om } p \neq i, \underline{p \neq j} \\ \underline{\sigma(i)} & \text{om } p = j, \\ \underline{\sigma(j)} & \text{om } p = i. \end{cases}$$

$$(= \sigma(\tau_{ij}(P)))$$

$$\begin{aligned}
 \det A &= \sum_{\delta \in \Sigma_n} \text{sign}(\delta) a_{1\delta(1)} \cdots a_{n\delta(n)} \\
 &= \dots + \cancel{\text{sign}(\delta) a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \cdots a_{n\delta(n)}} + \dots \\
 &\quad + \dots + \cancel{\text{sign}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}} + \dots \\
 &= \cancel{\text{sign}(\delta(\tau_{ij}(P)), a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \cdots a_{i\delta(i)} \cdots a_{j\delta(j)} \cdots a_{n\delta(n)})} \\
 &\quad \text{---} \quad \text{---} \\
 &\quad \text{---} \quad \text{---} \\
 &= \cancel{- \text{sign}(\delta) a_{1\delta(1)} a_{2\delta(2)} \cdots a_{n\delta(n)}}
 \end{aligned}$$

$$= 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

B

Förlidsats. Om vi byter plats på två rader i en matris A så är determinanten $-\det A$.

16.54

Exempel:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \end{array} \right|$$

Bevis. Definiera

$$\det B = 0.$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

rad i \swarrow samm
rad j

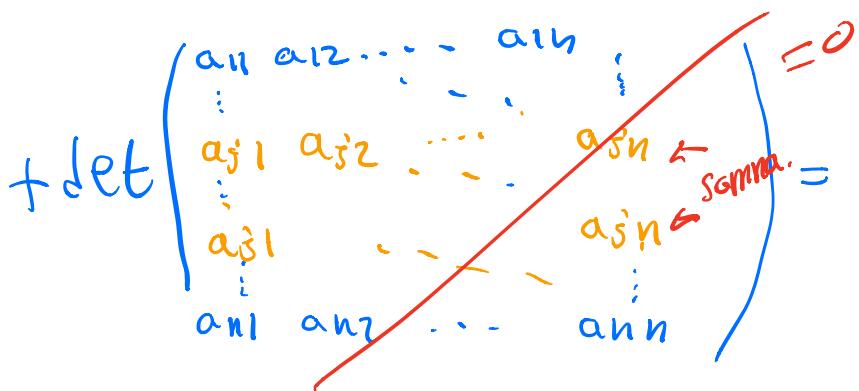
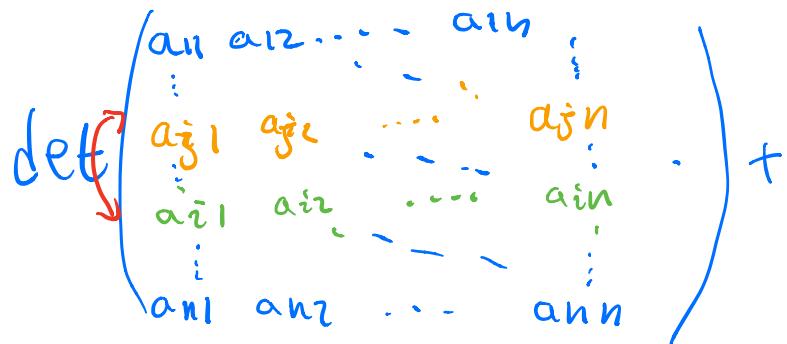
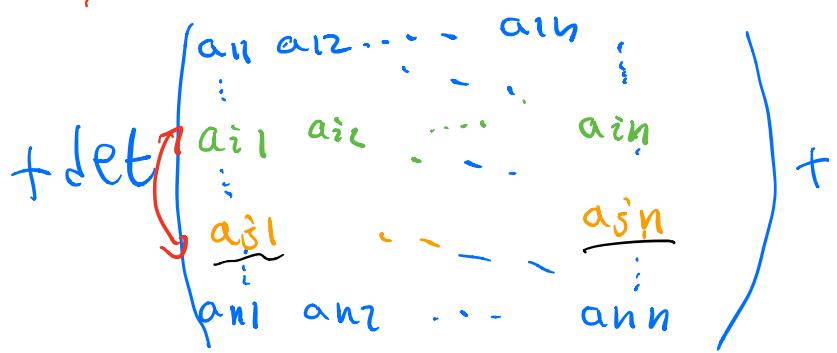
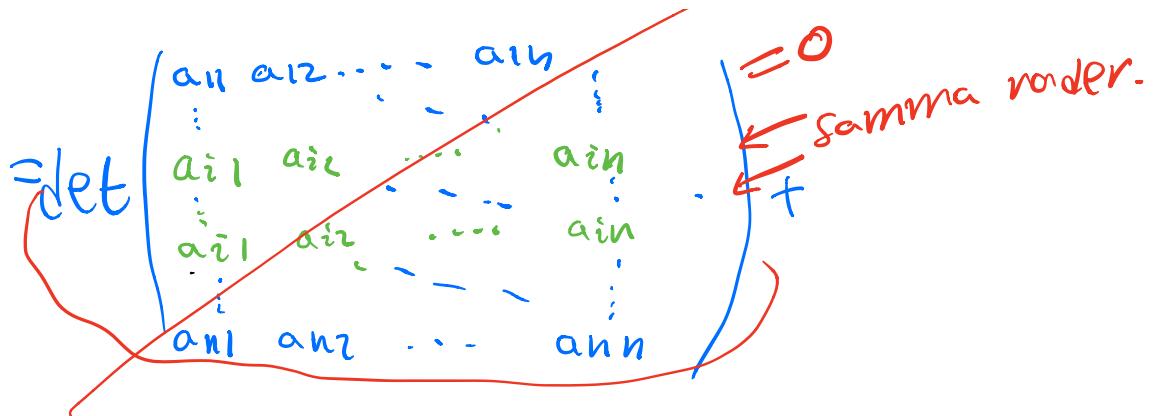
Då är

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) SÄTT.

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$-\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

□

Har vi någon produktregel?

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Lemma. Låt E vara en elementär $(n \times n)$ matris och A en $(n \times n)$ matris.

Då är

$$\det(E \cdot A) = \det E \cdot \det A.$$

Beweis (skiss) Det finns 3 typer av elementära matriser.

EX: Låt $E = E_{ij}$ ← platsbyte.
foljdsatsen

$$\det(EA) = \det(E_{ij} A) \stackrel{?}{=} \rightarrow \det A = \det E_{ij} \cdot \det A.$$

och $\det E_{ij} = -1 \cdot \det I = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Liknande för de övriga.

□

SATS. Låt A vara en $n \times n$ matris.

$$\left[A \text{ är inverterbar} \right] \Leftrightarrow \left[\det A \neq 0 \right].$$

Bevis. Kom ihåg från tidigare att A kan skrivas

$$A = E_1 E_2 \dots E_s \cdot R$$

för E_i är elementära matriser och R är
på radreducerad trappstegsform. Kom ihåg

$$\left[A \text{ är inverterbar} \right] \Leftrightarrow \left[R = I \right].$$

S^c

$$\begin{aligned}\det A &= \det(E_1 E_2 \dots E_s R) \\ &= |\text{Lemmat}| = \det E_1 \cdot \det(E_2 E_3 \dots E_s R) \\ &= \dots = \underline{\det E_1 \cdot \det E_2 \dots \det E_s} \cdot \underline{\det R}.\end{aligned}$$

Nu, om $R = I$ så är

$$\begin{aligned}\det A &= \det E_1 \dots \det E_s \cdot \frac{\det I}{I} \\ &\neq 0 \\ \text{Omvälvning: } &\text{om } R \neq I \stackrel{\substack{\text{uppgift} \\ 10.2.}}{\implies} \det R = 0 \\ \rightarrow \det A &= 0.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Exempel: Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som
ekvationssystemet

$$\left| \begin{array}{l} tx + 2y + z = 3 \\ \quad -y = 2 \\ \hline x + y + tz = 1 \end{array} \right.$$

har unik lösning.

Lösning: När har vi unik lösning?

$$A \bar{X} = B$$

Om A är inverterbar s: fä's

$$\bar{X} = A^{-1} B$$

dvs unik lösning. Dvs vi frågar oss när är
 A inverterbar. Låt

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

$$\det A = /räkna ut/ = -t^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow t=1 \text{ eller } t=-1.$$

Svar: Om $t \neq \pm 1$ är A inverterbar.

SATS. Låt A och B vara $n \times n$ matriser.

Då är

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Bevis. Man delar upp i fall.

Fall 1. Om något av A eller B är singulära. $\det A \cdot \det B = 0 = \det(AB)$.

Fall 2. Om A och B är inverterbara.

Då kan vi skriva A och B som en produkt av elementära matriser...

□

Förlidsats. Om A är inverterbar

så är

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Beweis.

$$1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} \underline{\det A \cdot \det A^{-1}}$$

$\Leftrightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\det A \neq 0 \text{ ty A är inverterbar}) \quad \square$

Beräkning av determinanter.

$$\textcircled{1} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 3 \end{array} \right| = \textcircled{2} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{array} \right| = \textcircled{3} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \end{array} \right| = \textcircled{4} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 3 \end{array} \right| \sim \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{array} \right| = 1 \cdot 2 \cdot (-12) = -24.$$