Föreläsning 10 i linjär algebra för gymnasister

Vad gjorde vi förra gången?

Vi definierade begreppet determinant för en kvadratisk $n \times n$ matris.

Kom ihåg:

Definition. Låt $A = (a_{ij})$ vara en $n \times n$ matris. Determinanten av A definieras som talet

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

där $\mathfrak{S}_n = S_n$ är den symmetriska gruppen av n element och $\operatorname{sign}(\cdot)$ definieras av

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{om antalet inversioner är jämnt} \\ -1 & \text{om antalet inversioner är udda.} \end{cases}$$

(En inversion är ett talpar (i,j) med $1 \leq i < j \leq n$ så att $\sigma(i) > \sigma(j)$ för en permutation σ på $\{1, \dots, n\}$.)

Idag fortsätter vi på det spåret. Vi ska nämligen prata om egenskaper hos determinanten. Låt oss börja med lite teori:

Inversioner

<u>Definition</u>. Betrakta mängden av alla permutationer av talen $\{1, \dots, n\}$, dvs $\mathfrak{S}_n$. $\forall$ talpar $1 \le i < j \le n$, $i \neq j$ har vi permutationen

$$\tau_{ij}(p) = \begin{cases} p & \text{om } i \neq p,\ p \neq j \\ i & \text{om } p = j \\ j & \text{om } p = i. \end{cases}$$

Denna permutation kallas för en transposition.

<u>Exempel:</u> $\tau_{12} \in \mathfrak{S}_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\tau_{35} \in \mathfrak{S}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Lemma. (Hjälpsats)

För varje permutation $\sigma \in S_n$ och varje transposition τ_{ij} har vi att

$$\operatorname{sign}(\sigma \tau_{ij}) = -\operatorname{sign}(\sigma).$$

Bevis. Uppgifterna.

Detta lemma leder oss till följande räkneregler.

SATS. Låt A vara en $n \times n$ matris. Determinanten har följande egenskaper:

(i). $\det(c \cdot A) = c \cdot \det A$

(ii). Om två rader i A är lika så är $\det A = 0$.

(iii). Ifall rad p i A kan skrivas som

$$a_{p,k} = b_{p,k} + c_{pk}$$

då har vi

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{rad } p \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{p1}+c_{p1} & b_{p2}+c_{p2} & \cdots & b_{pn}+c_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{p1} & b_{p2} \cdots & b_{pn} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{p1} & c_{p2} \cdots & c_{pn} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bevis. (i). Vi vill visa $\det(c \cdot A) = c \cdot \det A$.

$$\det(c \cdot A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{p1} & \cdots & c \cdot a_{pn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \; p$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{p-1\,\sigma(p-1)} \cdot c\, a_{p\sigma(p)} a_{p+1\,\sigma(p+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= c \cdot \det A.$$

(ii) Visas på analogt sätt. (Övning)

(ii) Vi vill visa att om två rader i A är lika så är $\det A = 0$.

Testa: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ då är

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \underline{ab} - \underline{ab} = 0, \text{ Ok.}$$

(Man kan visa allmänna fallet med induktion).

Låt rad i och rad j vara lika,

dvs. $\underline{a_{ik} = a_{jk}}$ $\forall k = 1, \dots, n$.

$$\begin{array}{c} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}.$$

Vi vill visa att

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \overset{!}{=} 0.$$

Idé: visa att varje term förekommer två gånger fast med olika tecken.

Fixera en permutation σ och betrakta

$$\tau(p) = \begin{cases} \sigma(p) & \text{om } p \neq i,\ p \neq j \\ \sigma(i) & \text{om } p = j. \\ \sigma(j) & \text{om } p = i. \end{cases}$$

$$\left(=\sigma(\tau_{ij}(p))\right)$$

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sign}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$=\dots+\operatorname{sign}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(i)}\,a_{j\sigma(j)}\cdots a_{n\sigma(n)}+\dots$$

$$+\dots+\operatorname{sign}(\tau)\,a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}+\dots$$

$a_{ik}=a_{jk}\ \forall k$

$$=\operatorname{sign}(\sigma(\tau_{ij}(p)))\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{i\sigma(j)}\cdots a_{j\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

i och samma rad

$$a_{i\sigma(j)}=a_{j\sigma(j)},\qquad a_{j\sigma(i)}=a_{i\sigma(i)}$$

$$=-\operatorname{sign}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\,a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$=0+0+0+\dots+0=0.$$

$\square$

<u>Följdsats.</u> Om vi byter plats på två rader i en matris A så är determinanten $-\det A$.

16.54

Exempel:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&7&4\\3&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&7&4\end{vmatrix}.$$

Bevis. Definiera

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{rad } i \\ \\ \text{rad } j \\ \\ \\ \end{array} \Big\} \text{ samma}$$

$\det B = 0.$

Då är

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(iii) SATS.

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$
= \cancel{\det\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}} = 0 \quad \text{samma rader.}
$$

$$
+ \det\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{j1} & & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix} +
$$

$$
\det\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix} +
$$

$$
+ \cancel{\det\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{j1} & & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}} = 0 \quad \text{samma.} \quad =
$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & & \ddots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$-\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Har vi någon produktregel?

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Lemma. Låt E vara en elementär $(n \times n)$ matris och A en $(n \times n)$ matris. Då är

$$\det(E \cdot A) = \det E \cdot \det A.$$

Bevis (skiss) Det finns 3 typer av elementära matriser.

Ex: Låt $E = E_{ij}$ ← platsbyte.

$\det(EA) = \det(E_{ij}A) \overset{\text{följdsatsen}}{=} -\det A = \det E_{ij} \cdot \det A.$

och $\det E_{ij} = -1 \cdot \det I = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Liknande för de övriga.

$\square$

SATS. Låt A vara en $n \times n$ matris.

[A är inverterbar] $\Longleftrightarrow$ [$\det A \neq 0$].

Bevis Kom ihåg från tidigare att A kan skrivas

$$A = E_1 E_2 \cdots E_s \cdot R$$

där E_i är elementära matriser och R är på radreducerad trappstegsform. Kom ihåg

[A är inverterbar] $\Longleftrightarrow$ [$R = I$].

Så

$$\det A = \det(E_1 E_2 \cdots E_s R)$$

$$= /\text{Lemmat}/ = \det E_1 \cdot \det(E_2 E_3 \cdots E_s R)$$

$$= \dots = \det E_1 \cdot \det E_2 \cdots \det E_s \cdot \det R.$$

Nu, om $R = I$ så är

$$\underbrace{\det A}_{\neq 0} = \det E_1 \cdots \det E_s \cdot \underbrace{\det I}_{1}$$

Omvändningen: om $R \neq I \xRightarrow{\text{uppgift } 10.2} \det R = 0$

$\Rightarrow \det A = 0.$

Q.E.D.

Exempel: Avgör för vilka $t \in \mathbb{R}$ som ekvationssystemet

$$\begin{cases} tx + 2y + z = 3 \\ \quad\;\; -y \qquad = 2 \\ x + y + tz = 1 \end{cases}$$

har unik lösning.

Lösning: När har vi unik lösning?

$$AX = B$$

Om A är inverterbar så fås

$$X = A^{-1}B$$

dvs unik lösning. Dvs vi frågar oss när är A inverterbar. Låt

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

$$\det A = /\text{räkna ut}/ = -t^2+1 \overset{!}{=} 0$$

$\Leftrightarrow$ $t=1$ eller $t=-1$.

Svar: Om $t \neq \pm 1$ är A inverterbar.

<u>SATS</u>. Låt A och B vara $n \times n$ matriser.
Då är
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

<u>Bevis.</u> Man delar upp i fall.

<u>Fall 1.</u> Om <u>någon</u> av A eller B är singulära. $\det A \cdot \det B = 0 = \det(AB)$.

<u>Fall 2.</u> Om A och B är inverterbara.
Då kan vi skriva A och B som en produkt av elementära matriser...

$\square$

<u>Följdsats.</u> Om A är inverterbar
så är
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Bevis.

$$\underline{1} = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) \overset{\text{produktregeln}}{=} \underline{\det A \cdot \det A^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad \left(\det A \neq 0 \text{ ty } A \text{ är inverterbar} \right) \quad \blacksquare$$

Beräkning av determinanter.

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot (-12) = -24.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-1 & 4-2 & 6-3 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} \sim \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix}}_{=0}$$