Föreläsning 11 - Linjär algebra för gymnasister

Förra gången: Egenskaper hos determinanten!

Exempelvis: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (\det A \neq 0)$$

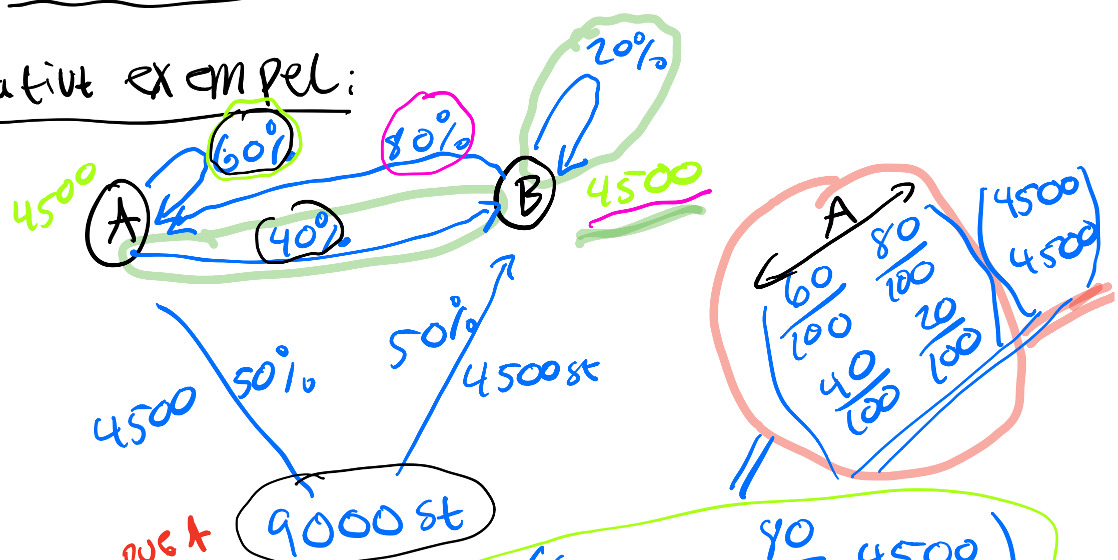
Vi lärde oss räkna ut determinanter:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

och även att $\{A \text{ är inverterbar}\} \iff \{\det A \neq 0\}$

Idag: Markovkedjor (Andrei Markov)

Illustrativt exempel:



dag $F_1 = \begin{pmatrix} 4500 \\ 4500 \end{pmatrix}$ pub A, pub B

$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} \cdot 4500 + \frac{80}{100} \cdot 4500 \\ \frac{40}{100} \cdot 4500 + \frac{20}{100} \cdot 4500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6300 \\ 2700 \end{pmatrix}. \quad F_3 = \begin{pmatrix} 5940 \\ 3060 \end{pmatrix} \text{ osv...}$$

Modell: Låt $F_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, där a_n är antalet besökare vid pub A och b_n är antalet besökare vid pub B dag n.

$$F_2 = A F_1 \quad \text{där } F_1 = \begin{pmatrix} 4500 \\ 4500 \end{pmatrix}.$$

$$F_3 = A \cdot F_2 = A \cdot (A F_1) = A^2 F_1.$$

$$\vdots$$

$$\boxed{F_{n+1} = A \cdot F_n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 60\% & 80\% \\ 40\% & 20\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} & \frac{80}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix}.$$

Def. En kvadratisk $(m \times m)$-matris $A = (a_{ij})$ kallas stokastisk om

(i) alla element i A är icke negativa, $a_{ij} \geq 0 \ \forall i,j = 1, \dots m$.

(ii) kolumnsummorna är alla lika med ett, dvs

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Hur ser fördelningen ut efter lång tid?

$$F_{n+1} = A \cdot F_n$$
$$= A \cdot A \cdot F_{n-1}$$
$$= A \cdot A \cdot A \cdots A \cdot F_1$$
$$= A^n \cdot F_1 \qquad \left(F_1 = \begin{pmatrix} 4500 \\ 4500 \end{pmatrix}\right)$$

Vad är A^n?

Exempel: Tag $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vad är då B^n?

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}.$$
$$\vdots$$
$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Nu till $A = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$. Vad är A^n?

Input från teorin om egenrum:

Matrisen A är något som kallas diagonaliserbar.

$$A = PDP^{-1}$$

där D är en diagonalmatris.

Ex:

$$\begin{array}{ccc} & P & D & P^{-1} \\ A = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}. \\ & \text{egenvektorer} & \text{egenvärden} & \end{array}$$

Då är $A = PDP^{-1}$ och

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}\cdots}\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}$$

$$= PD \cdot D \cdot D \cdots DP^{-1}$$

$$= PD^nP^{-1}.$$

DVS:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1/3 \\ \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{5})^n & -\frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{5})^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{5})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{5})^n \end{pmatrix}$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$$

$$F_{n+1} = A^n F_1 = A^n \begin{pmatrix} 4500 \\ 4500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 3000 + \frac{(-1)^n}{5^n} \cdot 1500 + 3000 + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} 3000 \\ 1500 + \frac{(-1)^{n+1}}{5^n} \cdot 1500 + \frac{(-1)^n}{5^n} \cdot 3000 \end{pmatrix}$$

Slutfördelning: vi söker F_∞

$$F_\infty = \lim_{n \to \infty} (F_n) = \lim_{n \to \infty} (A^{n-1} F_1)$$

$$= \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

Alternativt:

$$\lim_{n \to \infty} A^n = \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \cancel{\frac{(-1)^n}{3 \cdot 5^n}} & \frac{2}{3} + \cancel{\frac{2}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}} \\ \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}} & \frac{1}{3} + \cancel{\frac{2}{3} \frac{(-1)^n}{5^n}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{n \to \infty} F_n = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4500 \\ 4500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

$2/3 + 1/3 = 1$

$$F_\infty = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$= (2/3 \;\; 1/3)$

Utfallsvektor

Definition. En utfallsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ är en vektor $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ där $x_i \geq 0 \ \forall i = 1 \ldots n$ och

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Exempel: $F_1 = (1/2, 1/2)$

Markovkedja

Def. Låt $\{X_1, X_2, \ldots\}$ ($F_1 \; F_2 \; \ldots \; F_n$) vara en sekvens av utfallsvektorer i $\mathbb{R}^m$. Om det finns en stokastisk matris A så att

$$X_{n+1} = A X_n \qquad F_{n+1} = A F_n.$$

för alla $n \geq 1$ så kallas sekvensen för en Markovkedja.

Exempel: $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ från tidigare är en Markovkedja.

Observation: oberoende av initialvärde.

$F_1 = (1/2, 1/2) \rightsquigarrow F_\infty = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \;\Big|\; \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}.$

$F_1 = (\overset{A}{p}, \overset{B}{q}) \rightsquigarrow F_\infty$?

$p+q=1.$ $\frac{9}{10}$ $\frac{1}{10}$

Låt oss räkna:

$$F_\infty = \lim_{n\to\infty} A^n F_1 = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(p+q) \\ \frac{1}{3}\underbrace{(p+q)}_{=1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

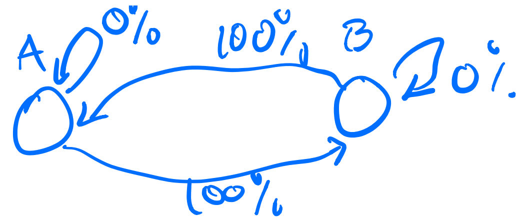
Obs: Ej alltid oberoende !

(frivillig)

Övning: Hitta en stokastisk matris så att initialvektorn påverkar slutfördelningen F_∞.

Obs: Vi behöver inte ens ha någon slutfördelning.

Ex: Tag $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$


A
B
0%
100%
100%
0%