F3: Avbildningar

Funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ex: $f(x) = x^2$

argumentet $x = 2$

avbildas på värdet $x^2 = 4$

Matrisavbildningar

$\boxed{\text{En matris } A_{2\times 2} \text{ definierar en avbildning } T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

Multiplikationsregeln ger

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ -3\cdot 1 + 4\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

argumentet $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

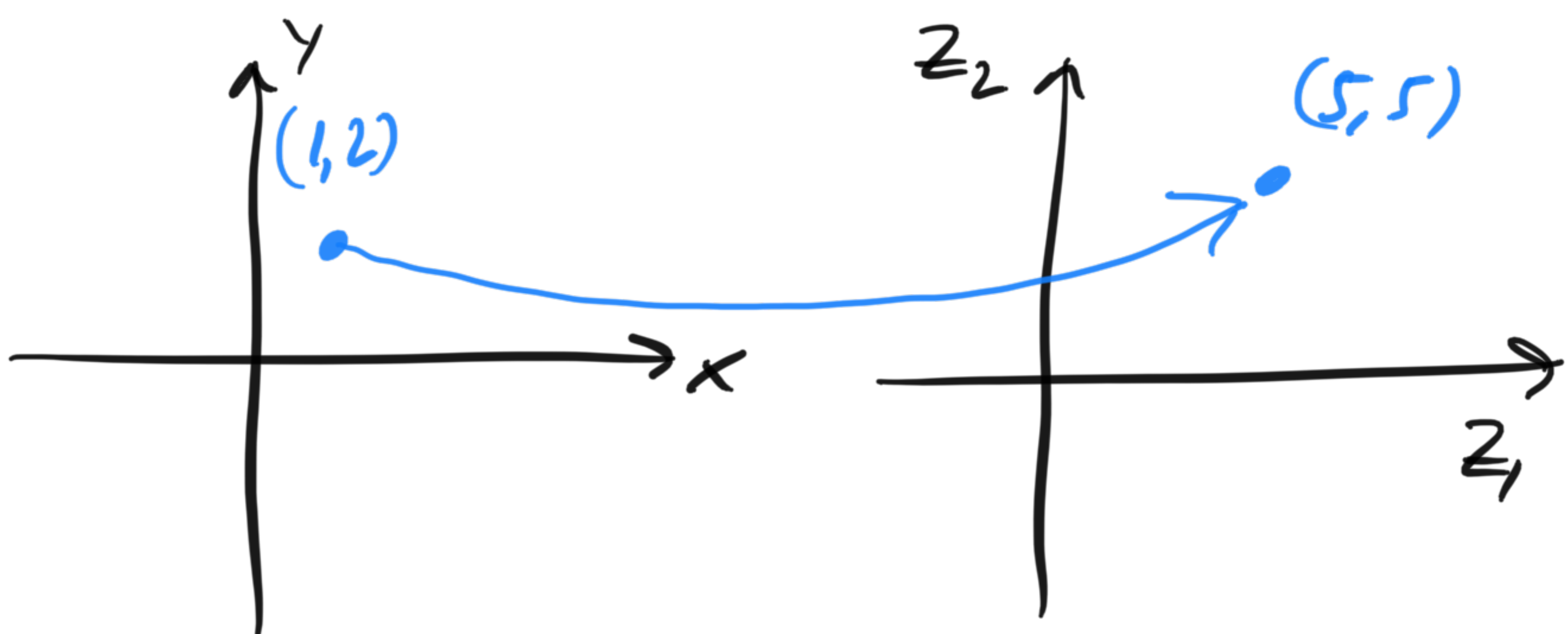
avbildar på värdet $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

* notation: $T_A(1,2) = (5,5)$

Grafisk tolkning

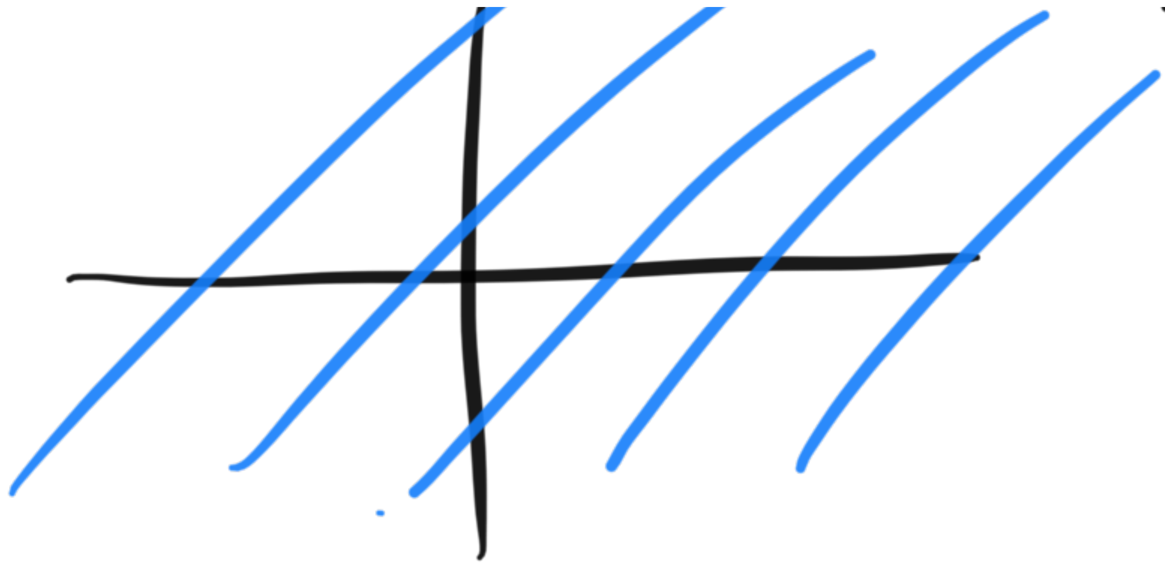
$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

avbildar $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på $\vec{w} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$



Kolumnvektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kan identifieras med punkten med koordinaterna (x, y) i planet

$\mathbb{R}^2$ = mängden av alla punkter (x, y), d.v.s. hela planet

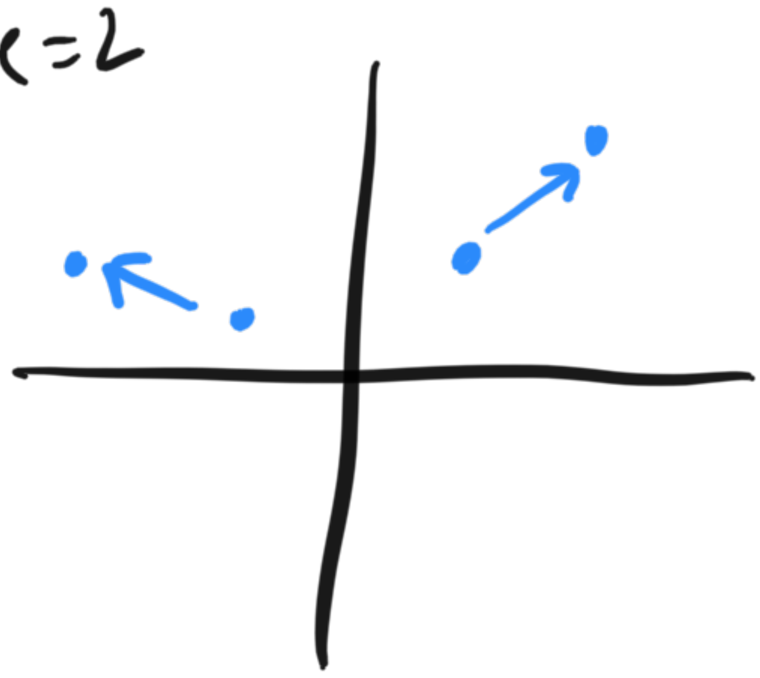


Ex: Skalning

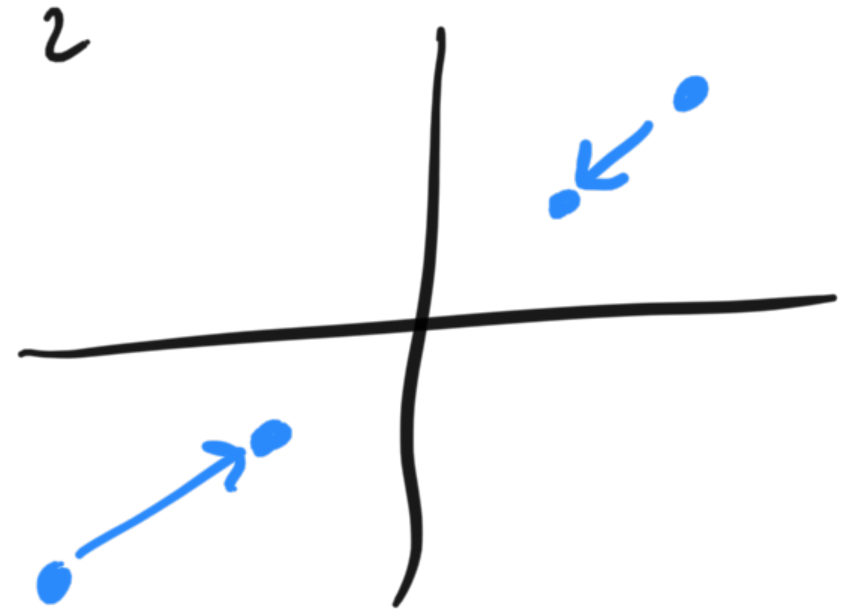
matrisen $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

$$A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k \\ 3k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$k=2$



$k=\frac{1}{2}$



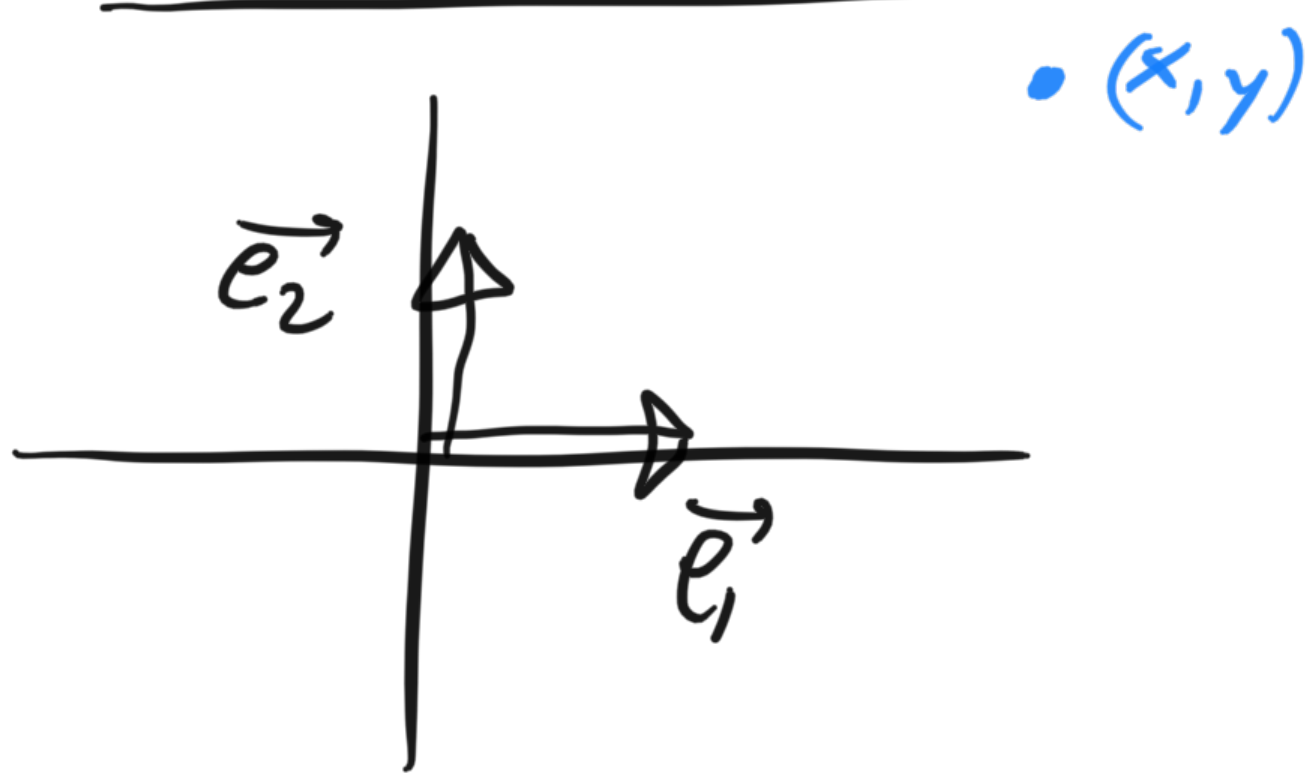
Standardbasen för $\mathbb{R}^2$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Standardbasen för } \mathbb{R}^2 \text{ är} \\ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{array}}$$

✱ märk:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

* grafiskt: nå pkten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i planet genom att gå x steg längs $\vec{e_1}$ och y steg längs $\vec{e_2}$ om du börjar i origo



Verkan på standardbasen bestämmer matrisen helt

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A\vec{e_1}$ ger första kolumnen i A

$A\vec{e_2}$ ger andra kolumnen i A
schematiskt:

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ T(\vec{e_1}) & & T(\vec{e_2}) \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Matrisavbildning är linjär

* matrismultiplikation är distributiv:

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

* låt B, C = standardbasen:

$$A\,(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = A\vec{e_1} + A\vec{e_2}$$

d.v.s.

$$T_A(1,1) = T_A(\vec{e_1}) + T_A(\vec{e_2})$$

* mer allmänt: (x, y) = koordinater:

$$T_A(x,y) = A(x\vec{e_1} + y\vec{e_2}) =$$

$$= x A\vec{e}_1 + y A\vec{e}_2$$

d.v.s.

$$T_A(x,y) = x\, T_A(\vec{e}_1) + y\, T_A(\vec{e}_2) \quad (\ast)$$

En avbildning $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$f(x,y) = x f(\vec{e}_1) + y f(\vec{e}_2)$$

för <u>alla</u> (x,y) i $\mathbb{R}^2$ kallas <u>linjär</u>

d.v.s. alla matrisavbildningar är linjära, se $(\ast)$

<u>Linjära avbildningar är matrisavbildningar</u>

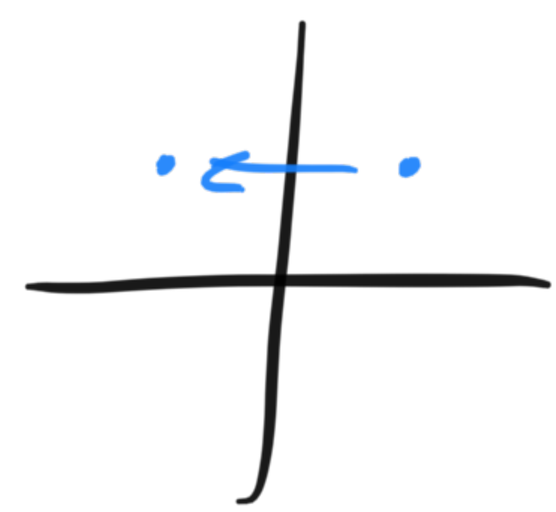
En linjär avbildning $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av matrisavbildningen T_A, där

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix}$$

Ex: spegling

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som speglar i y-axeln.

$$f(x,y) = (-x, y)$$



a) visa linjär:

$$f(\vec{e_1}) = f(1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e_2}) = f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

prova nu def.:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x f(\vec{e_1}) + y f(\vec{e_2}) \Rightarrow \text{linjär!}$$

b) Hitta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

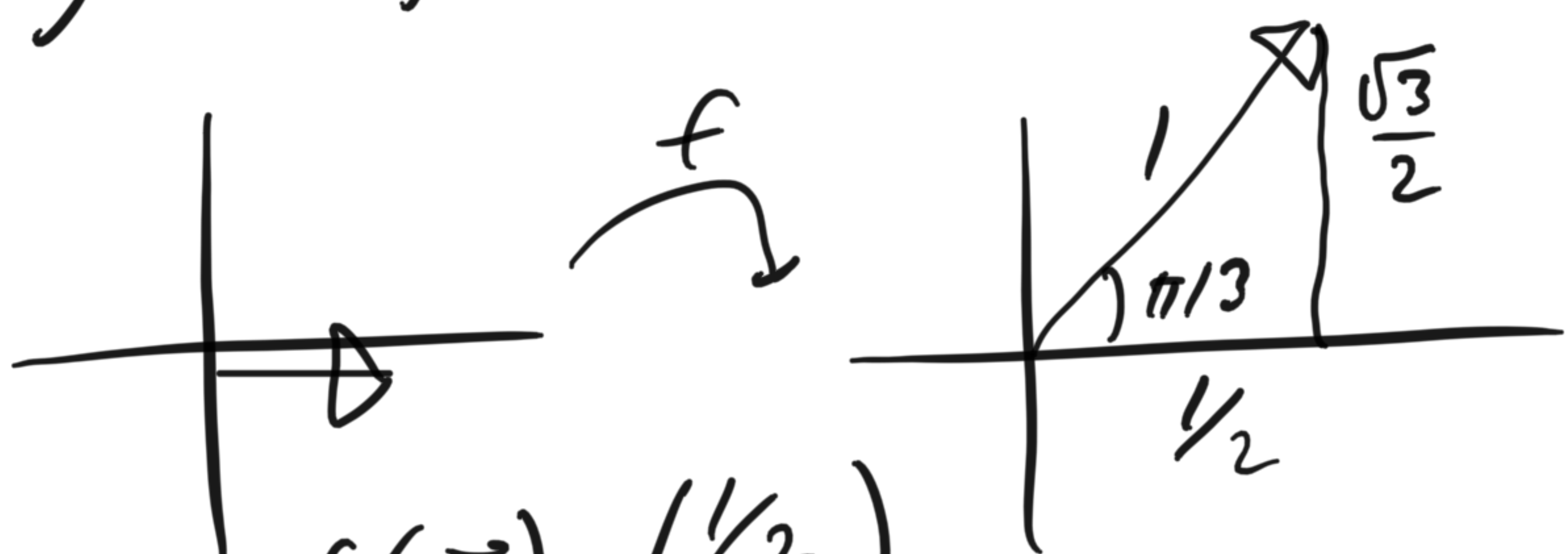
Test:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

Ex: rotation

Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som roterar $\frac{\pi}{3}$ rad.

givet: linjär. hitta matrisen!



$$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

p.s.s.: $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

T.ex.:

$$f(1,1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 + 1/2 \end{pmatrix}$$

Värdemängd

Alla värden som antas
när du sätter in alla möjliga
argument kallas funktionens **värdemängd**.

ex: $f(x) = x^2$ $\quad V = \{ t \mid t \geq 0 \}$

ex: $f(x,y) = (x,0)$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

d.v.s. x-axeln!