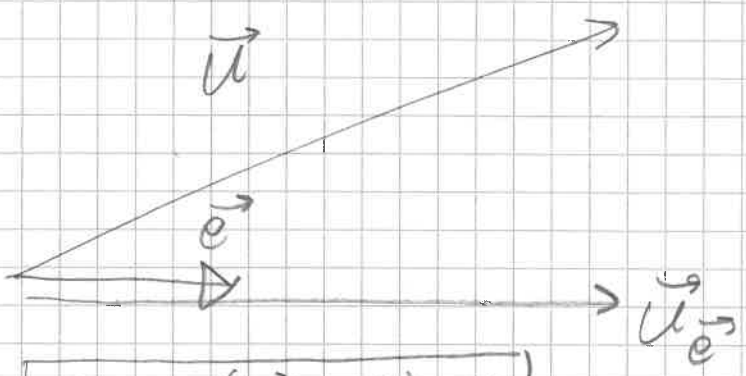
F5: Area och determinant

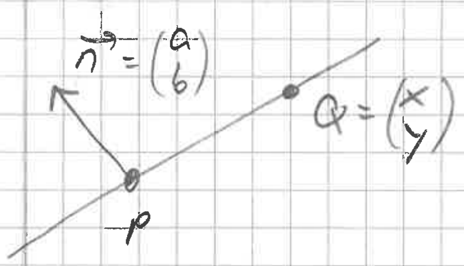
Repetition geometri i planet



$$\boxed{\vec{u}_{\vec{e}} = (\vec{u}\cdot\vec{e})\,\vec{e}}$$

Linje på parameterform: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Linje på ekvationsform:



$$(Q-P)\cdot\vec{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{ax + by = -c}$$

(konstanten c "parallellförflyttar" linjen)

Parameterform → ekvationsform:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ger $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ (t.ex.)

($P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ bestämmer c)

Ekvationsform → parameterform:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ger $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (t.ex.)

(måste även hitta en punkt på linjen, sätt t.ex. $y=0$ i ekvationen)

Avstånd mellan pkt Q och linje

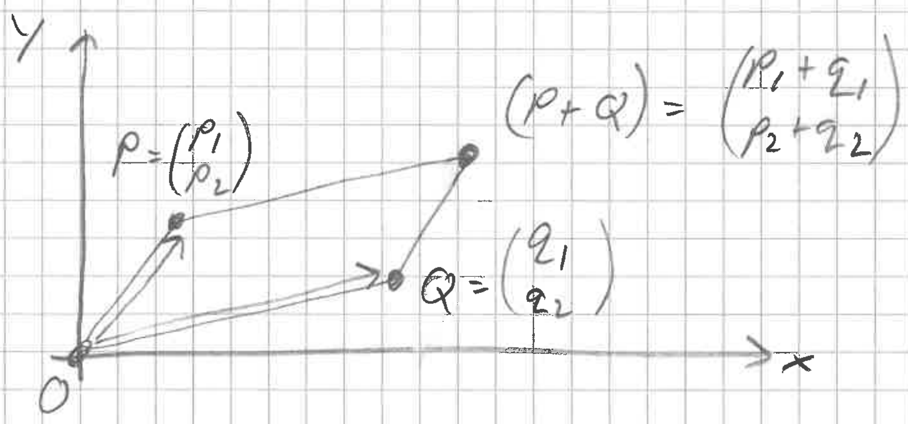
1) Hitta vektor PQ (P på linjen)
2) Projicera på normalvektorn $\vec{n}$.

Parallellogram

Givet två punkter $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ och $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

kan vi bilda en parallellogram, vars hörn är:

origo $\quad P \quad Q \quad P+Q$

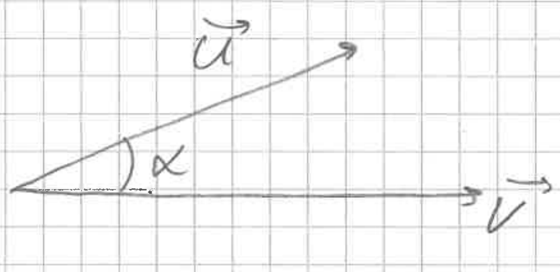


Repetition: Skalärprodukt $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\alpha)$$

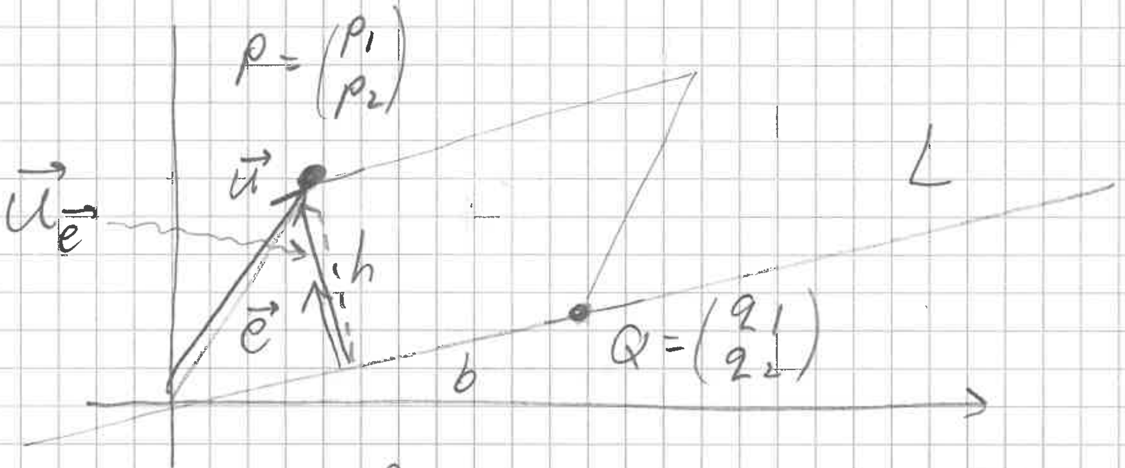
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Area av parallellogram

(3)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Parallellogrammens area är} \\ \text{area} = |p_1 q_2 - p_2 q_1|\end{array}}$$



Bevis: <u>Basen</u>: $b^2 = q_1^2 + q_2^2 \Rightarrow b = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$

<u>Linjen L</u>: riktningsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix}$

enhetsvektor: $\vec{e} = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ $\quad \|\vec{n}\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$

<u>Vektorn $\vec{u}$</u>: $\vec{u} = P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

<u>Projicerad</u>: $\vec{u}_{\vec{e}} = (\vec{u} \cdot \vec{e})\,\vec{e}$

<u>Höjden</u>: $h = \|\vec{u}_{\vec{e}}\| = |\vec{u} \cdot \vec{e}| \cdot \underbrace{\|\vec{e}\|}_{=1}$

$$\Rightarrow h = |\vec{u} \cdot \vec{e}| = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{n}\|} |-p_1 q_2 + p_2 q_1| = \frac{1}{\|\vec{n}\|} |p_1 q_2 - p_2 q_1|$$

Arean blir:

$$\text{area} = b \cdot h =$$

$$= \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \cdot \frac{|p_1 q_2 - p_2 q_1|}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad A = |p_1 q_2 - p_2 q_1| \qquad \square$$

Annorlunda formulering:

Arean av en parallellogram som "spänns upp" av $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

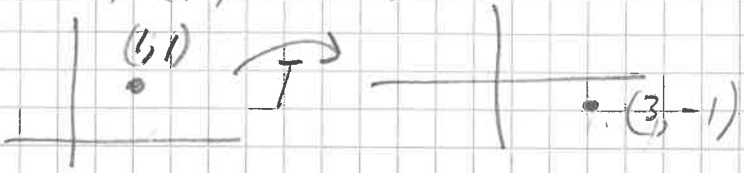
ges av

$$\left| \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} \right| = |p_1 q_2 - p_2 q_1|$$

Area och avbildningar

Repetition: $\boxed{\text{En matris } A \text{ definierar en avbildning (funktion) } T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$



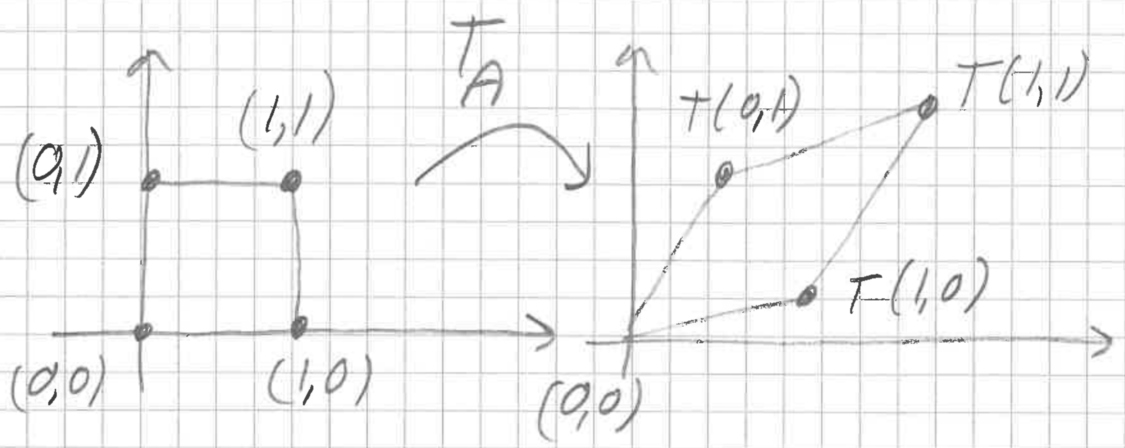
ex: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = T_A(\vec{e}_1)$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = T_A(\vec{e}_2)$

d.v.s. verkan på standardbasen bestämmer matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} | & | \\ T_A(\vec{e}_1) & T_A(\vec{e}_2) \\ | & | \end{bmatrix}$$

Bilden av enhetskvadraten



T = linjär avbildning, given av matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Bilden blir en parallellogram}}$

<u>Bevis:</u> $T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ ok

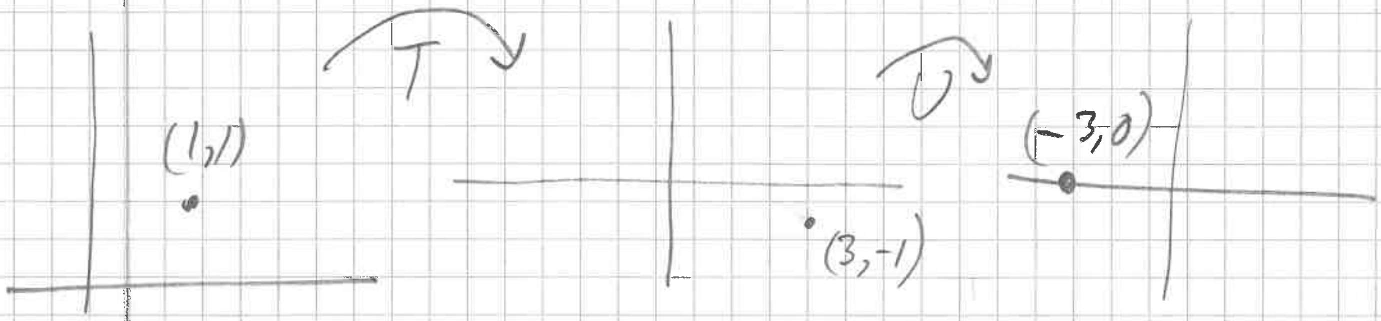
$\boxed{\text{Arean blir } |\det(A)| = |ad-bc|}$

<u>Bevis:</u> Arean av en parallellogram som "spänner upp" av $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ och $T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ är

$$\text{area} = \left|\det \begin{bmatrix} T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) & T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \end{bmatrix}\right| \underset{\text{föregående sida}}{=} \left|\det \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\right|$$

$$= |bc - ad| = |ad-bc| \quad \square$$

Sammansättning



ex: Verka först med $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verka sedan med $U_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

> Sammansättningen $U_B \circ T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
>
> representeras av matrisen BA

ex: $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(U \circ T)_{BA} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ger

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ok!

Singulär matris

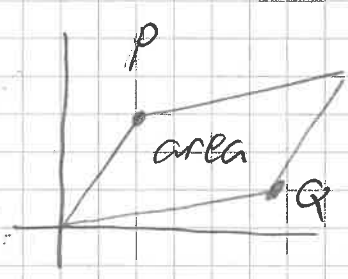
$$\boxed{ad-bc = \det A = 0 \iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ kallas "singulär"}}$$

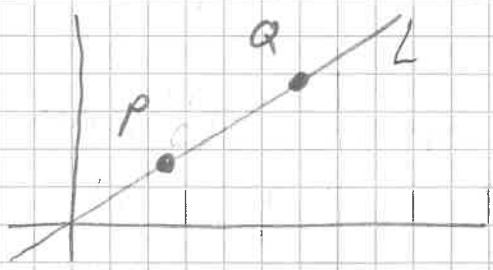
$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ är singulär precis då} \\ A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ eller } A = \begin{pmatrix} a & ta \\ c & tc \end{pmatrix} \end{array}}$$

Bevis: Inses. Men finns fler singulära matriser?

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

kan tolkas som arean av den parallellogram som spänns upp av $P = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ och $Q = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$





Arean blir noll precis då P och Q ligger på samma linje, d.v.s. precis då $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

(om $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ är $\det = 0$, så vi antar $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)