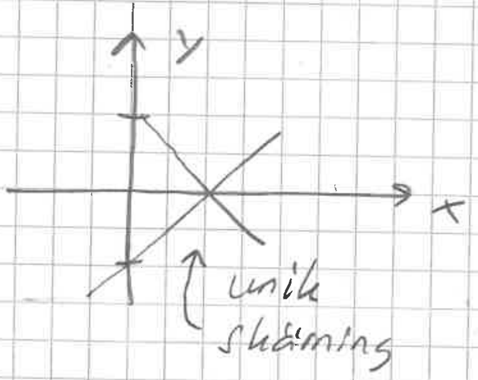
Mikael
Smedbäck

F6: Ekvationssystem

Lösningsmängder till linjära ekvationssystem

* unik lösning:

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = -1 + x \end{cases}$$

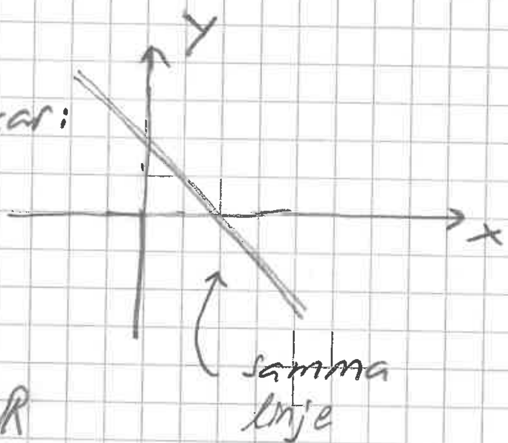


$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

* oändligt många lösningar:

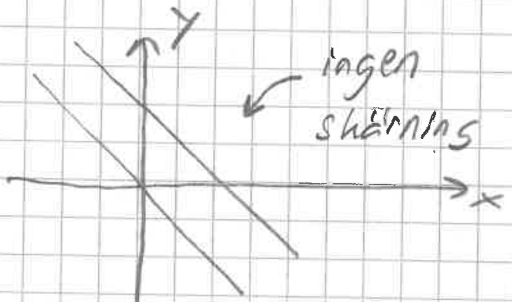
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 2y = 2 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



* ingen lösning:

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 0 - x \end{cases}$$



Detta är exempel på linjära ekvationssystem.
Här: två variabler x och y och två ekvationer.

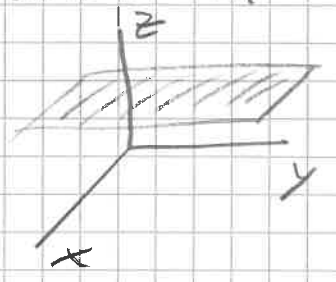
(x, y) är en lösning om (x, y) samtidigt satisfierar båda ekvationerna

Grafisk tolkning: (x, y) ligger samtidigt på båda linjerna

Lösningsmängden är mängden av alla lösningar (x, y).

Generalisering till $\mathbb{R}^3$:

* (x, y, z) kan tolkas som punkter i $\mathbb{R}^3$
* $ax + by + cz = d$
är ett plan i $\mathbb{R}^3$



Elementära radoperationer

* byt plats på två rader
* multiplicera en rad med en konstant $c \neq 0$
* addera en multipel av en rad till en annan rad

Systematisk ekvationslösning: "Gausselimination"

* de elementära radoperationerna ändrar inte lösningsmängden
* idé: använd därför de elementära radoperationerna för att omforma ekvationssystemet till en form där lösningen kan läsas av!
* allmänna fallet: m ekvationer, n variabler (d.v.s. söker lösningar i $\mathbb{R}^n$)

Exempel: 3 variabler, 3 ekvationer

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 & (-1) \quad (-1) \\ x + 2y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

* ersätt rad 2 med rad 2 − rad 1
* ersätt rad 3 med rad 3 − rad 1

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 0 + y - z = -1 \\ 0 + 0 - z = 1 & (-1) \end{cases}$$

* multiplicera rad 3 med (-1)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 0 + y - z = -1 \\ 0 + 0 + z = -1 & (+1) \quad (-2) \end{cases}$$

* ersätt rad 1 med rad 1 − 2 × (rad 3)
* ersätt rad 2 med rad 2 + rad 3

$$\begin{cases} x + y + 0 = 2 \\ 0 + y + 0 = -2 & (-1) \\ 0 + 0 + z = -1 \end{cases}$$

* ersätt rad 1 med rad 1 − rad 2

$$\begin{cases} x + 0 + 0 = 4 \\ 0 + y + 0 = -2 \\ 0 + 0 + z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

* unik lösning!: tre plan som skär i en punkt i $\mathbb{R}^3$, d.v.s. bara $(x, y, z) = (4, -2, -1)$ ligger samtidigt på alla tre planen!

Exempel: totalmatrisen

* skriv inte ut x, y, z, använd "totalmatrisen" istället:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(samma som första uppgiften)

"radekvivalens"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & +2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 & -1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{inget pivotelement}\\ \text{i sista kolumnen,}\\ \text{ingen fri kolumn}\end{array}\right\} \text{unik lösning!}}$

* "trappstegsform": varje rad innehåller fler nollor än raderna ovanför

* första nollskilda elementet i varje rad kallas "pivotelement"

* kolumn med pivotelement kallas pivotkolumn

* kolumn utan pivotelement kallas fri kolumn (aldrig sista kolumnen)

* fortsätt omformningen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +1 \quad -2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{cases}$$

* "reducerad trappstegsform" (unik):
  - trappstegsform
  - alla pivotelement = 1
  - alla element ovanför pivotelementen = 0

Exempel: 3 variabler, 4 ekvationer

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

ny rad!

enl. tidigare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

pivotkolumner (inga fria kolumner)

pivotelement i sista kolumnen!
⇒ lösning saknas!

* trappstegsform!

* lösning saknas! ingen punkt (x, y, z) finns som samtidigt satisfierar alla 4 ekvationerna

* grafiskt: 4 plan i $\mathbb{R}^3$, men det finns ingen punkt som samtidigt ligger på alla 4 planen

Exempel: 4 variabler, 3 ekvationer

$$\begin{cases} x + y + 2z + w = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

ny variabel

(3 "plan" i $\mathbb{R}^4$?)

Totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \quad -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

inget pivotelement i sista kolumnen, fri kolumn finns
$\Rightarrow \infty$ många lösningar!

* trappstegsform, en fri kolumn!
* fortsätt till reducerad trappstegsform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 1 \quad -2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 \\ z = -1 - t \\ w = 0 + t \end{cases}$$

"fri parameter" $t \in \mathbb{R}$

* ∞ många lösningar, parametriserade av $w = t$.
* dessa punkter (x, y, z, w) satisfierar samtidigt alla 3 ekvationerna, d.v.s. ligger samtidigt på alla 3 "planen" i $\mathbb{R}^4$.
* kommentar: fler fria kolumner hade gett en lösning med fler "fria parametrar"