Mikael Smedbäck

F7: Elementära matriser

①

Repetition: linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} 5x + 8y = 13 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 13 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 13 \end{array}\right) \; -5$$

(totalmatrisen)

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \times (1/3) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \; -1$$

(trappstegsform)

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

(reducerad trappstegsform)

Vilka elementära radoperationer ingick?

① Byt plats på två rader via $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Byt plats på rad 1 och rad 2.

Utförs genom matrismultiplikation från vänster:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}}_{E_{1,2}} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 8 & 13 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)_{2\times 3}}_{\text{ursprunglig totalmatris}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

②

② Addera en multipel av en rad till en annan rad via

$$E_{2,1}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Till rad 2 adderas multipeln (-5) av rad 1. Utförs genom matrismultiplikation från vänster:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}(-5)} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 13 \end{array}\right)}_{\text{totalmatrisen}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

③ Multiplicera en rad med en konstant $c \neq 0$ via

$$E_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Multiplicera rad 2 med $\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{E_2(1/3)} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right)}_{\text{totalmatrisen}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

4 Till rad 1 adderas multipeln (−1) av rad 2:

$$E_{1,2}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

utförs genom matrismultiplikation från vänster:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times2}}_{E_{1,2}(-1)} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_{2\times3}}_{\text{totalmatrisen}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Slutsats: man kan alltså utföra de elementära radoperationerna (lösa ekvationssystem) genom att multiplicera totalmatrisen från vänster med de elementära matriserna!}}$$

Definition av de elementära matriserna

* de elementära matriserna är kvadratiska $(n \times n)$-matriser som "nästan" är enhetsmatriser
* definition:

$$
\begin{array}{cl}
E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{rad } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\uparrow & \\
\text{kolumn } i &
\end{array}
$$

OBS: $k \neq 0$

$$
E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}
$$

rad i och rad j har bytt plats

$$
\begin{array}{cl}
E_{i,j}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{rad } i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\uparrow & \\
\text{kolumn } j &
\end{array}
$$

Elementärmatrisernas inverser

* $$\boxed{E_i(k) \cdot E_i\left(\frac{1}{k}\right) = I}$$

Multiplicera rad i med konstanten $k \cdot \frac{1}{k}$.

* $$\boxed{E_{ij} E_{ij} = I}$$

Byt plats på rad i och rad j två ggr.

* $$\boxed{E_{ij}(k)\ E_{ij}(-k) = I}$$

Till rad i adderas:

$(-k) \times (\text{rad } j)$

$+ (+k) \times (\text{rad } j)$

Exempel:

Vi har visat att

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{1,2}(-1)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{E_2(\frac{1}{3})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{2,1}(-5)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1,2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

ursprunglig koefficientmatris

d.v.s. X är inversen till B:

$$XB = I = BX$$

Kontroll: Enligt ovan:

$$XB = I$$

$$\Leftrightarrow E_{1,2}(-1)\, E_2(\tfrac{1}{3})\, E_{2,1}(-5)\, E_{1,2}\, B = I$$

Multiplicera med $E_{1,2}(+1)$ från vänster:

$$I \cdot E_2(\tfrac{1}{3})\, E_{2,1}(-5)\, E_{1,2}\, B = E_{1,2}(+1)$$

Multiplicera med $E_2(3)$:

$$I\, E_{2,1}(-5)\, E_{1,2}\, B = E_2(3)\, E_{1,2}(+1)$$

Multiplicera med $E_{2,1}(5)$:

$$I\, E_{1,2}\, B = E_{2,1}(5)\, E_2(3)\, E_{1,2}(+1)$$

Multiplicera med $E_{1,2}$:

$$B = \underbrace{E_{1,2} \cdot}_{I} E_{2,1}(5)\, E_2(3)\, E_{1,2}(+1)$$

Beräkna nu:

$$BX = E_{1,2}\, \overbrace{E_{2,1}(5)\, \underbrace{E_2(3)\, \overbrace{E_{1,2}(+1) \cdot E_{1,2}(-1)}^{I}\, E_2(1/3)}_{I}\, E_{2,1}(-5)}^{I}\, E_{1,2}$$

d.v.s. $BX = I$, ok