Mikael Smedbäck

F8: Konstruktion av matrisinvers

①

Reducerad trappstegsform

Allmänt ekvationssystem:

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + i \cdot z = l \end{cases}$$

Koefficientmatris:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Möjliga trappstegsformer:

$$\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Möjliga reducerade trappstegsformer:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0}^{r=4} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad 0}^{r=2} & a & x \\ 0 \quad 1 & b & x \\ 0 \quad 0 & 0 & x \\ 0 \quad 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Då gäller följande:

$$R_2\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & x \\ 0 & 1 & b & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ för } \vec{v} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sats om existens av matrisinvers

$A = (n \times n)$-matris

Följande påståenden är ekvivalenta:

1. Vänsterinvers A^{-1} existerar: $A^{-1}A = I$
2. $A\vec{v} = 0$ bara för $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $A = E_1 E_2 \cdots E_s$ (E_i = elementära matriser)

* Bevis av att 1 $\Rightarrow$ 2 (detta kräver inte $AA^{-1} = I$)

Antag: A^{-1} existerar, d.v.s. $A^{-1}A = I$

Därmed:

$$A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \qquad \square$$

* Bevis av att 2 $\Rightarrow$ 3

Antag: $A\vec{v} = 0$ bara för $\vec{v} = \vec{0}$

Börja med matrisen A.

Elementära radoperationer (via elementära matriser) omvandlar A till sin reducerade trappstegsform R

$$F_s \cdots F_2 F_1 A = R$$

Varje elementär matris E har en invers: $EF = I$, dvs

$$A = E_1 E_2 \cdots E_s R$$

Enligt föregående sida: $R = R_2$ ger $R_2\vec{v} = 0 \Rightarrow A\vec{v} = 0$ vilket motsäger antagandet ($\vec{v} \neq \vec{0}$). Alltså är

$$R = R_1 = I \Rightarrow A = E_1 E_2 \cdots E_s \qquad \square$$

* Bevis av att 3 $\Rightarrow$ 1

Antag: $A = E_1 E_2 \dots E_s$

Varje elementär matris E har en invers F,

$$FE = I.$$

Bilda nu:

$$A^{-1} = F_s \cdots F_1$$

Detta är vänsterinversen:

$$A^{-1} \cdot A =$$

$$= \underbrace{F_s \cdot \dots \cdot \underbrace{F_1 \cdot E_1}_{I} \cdot \dots \cdot E_s}_{I} = I$$

$\square$

* Kommentar: $A^{-1}A = I \Rightarrow AA^{-1} = I$:

$$A \cdot A^{-1} =$$

$$= \underbrace{E_1 \cdot \dots \cdot \underbrace{E_s \cdot F_s}_{I} \cdot \dots \cdot F_1}_{I} = I$$

En invers till A är således

$$A^{-1} = F_s \cdot \dots \cdot F_1$$

* Kommentar: Vi har visat att

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, Rightarrow] & \\ 3 \arrow[ur, Rightarrow] & & 2 \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

* Kommentar: 1 antar bara att vänsterinvers existerar,

$$BA = I.$$

Men detta är ekvivalent med 3, $A = E_1 \cdots E_s$, $C = F_s \cdots F_1$, som uppfyller $CA = I$. Vi har dock inte visat att vänsterinvers $\Rightarrow$ högerinvers, ty vi vet inte om $B = C$.

Vänsterinvers är högerinvers

> $A = (n \times n)$-matris
>
> Antag att B existerar sådan att $BA = I$
>
> Då gäller att $AB = I$, d.v.s. $B = A^{-1}$
>
> (definition av invers B till A: $AB = I = BA$)

Bevis:

Antag att $BA = I$

Enligt den tidigare satsen:

$$A = E_1 \cdots E_s$$

Inför

$$C = F_s \cdots F_1,$$

d.v.s.

$$AC = CA = I \quad (*)$$

Observera nu att

$$B = BI = B \cdot (AC) = (BA) \cdot C \overset{\text{antagandet}}{=} I \cdot C = C$$

d.v.s. $B = C$, d.v.s.

$$AB = AC = \{(*)\} = I$$

□

* Kommentar: Detta visar att en vänsterinvers är en invers. Kanske $A = E_1 \cdots E_s$ inte unikt bestämmer matriserna $E_1 \dots E_s$, men vi vet ändå att inversen är unik. För anta att det finns två inverser, B och C: $BA = AB = CA = AC = I$:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = I \cdot C = C$$

□

Konstruktion av matrisinvers

(1) Börja med

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$$

(2) A är inverterbar precis då $R = I$, d.v.s. $A^{-1} = F_s \cdots F_1$. Utför dessa radoperationer på <u>hela</u> matrisen ovan ger

$$\left[\begin{array}{c|c} F_s \cdots F_1 \cdot A & F_s \cdots F_1 \cdot I \end{array}\right]$$

(3) Detta är detsamma som

$$\left[\begin{array}{c|c} R = I & A^{-1} \end{array}\right]$$

(4) D.v.s. utför de radoperationer som ger den reducerade trappstegsformen $= \{A \text{ inverterbar}\} =$ $=$ identitetsmatrisen "till vänster". Då kan A^{-1} läsas av "till höger".

Exempel

Hitta inversen till $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

① Bilda $[A \mid I]$

② Utför radoperationer ger $[I \mid A^{-1}]$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1\;\;2\;\;0}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\;\;0\;\;0}}^{I}} \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1 \quad -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 5 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times -1 \\ \times -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\hphantom{1\;\;0\;\;0}}_{I}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-1\;\;0\;\;2}}_{A^{-1}}} \end{array}\right)$$

Inversen är

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$