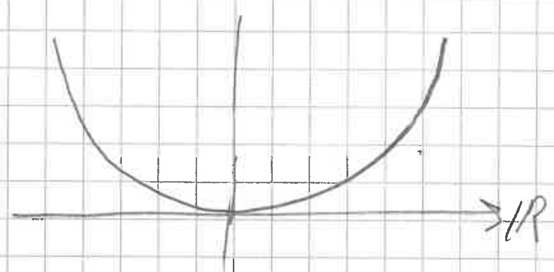
Mikael Smedbäck

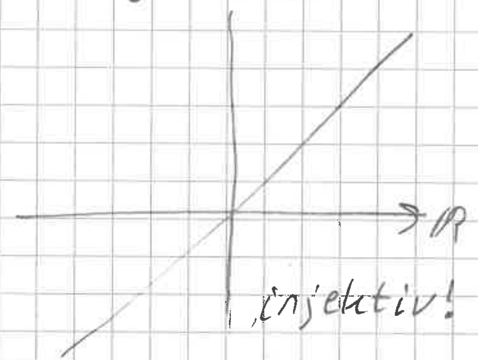
F9: Determinanten definition

Injektiv (1-1) avbildning

$f: T \to U$ är <u>injektiv</u> om olika element i T alltid avbildas på olika element i U: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

ex: $f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = 2x$





ej injektiv: $f(1) = f(-1) = 1$ $\qquad$ injektiv!

* inklusionsavbildningar $T \to U$ via $T \subseteq U$ är <u>alltid</u> injektiva

ex: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ via $f(p) = p \in \mathbb{Z}$ där $p \in \mathbb{N}$ är injektiv

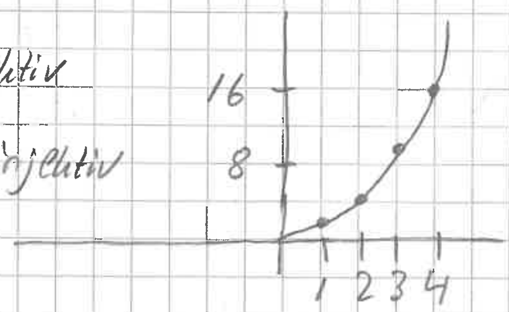
ex: $g(x) = 2x$ Kolla villkoret:

$2x = g(x) = g(y) = 2y \Rightarrow x = y$, d.v.s. injektiv!

ex: $\left.\begin{array}{l} f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ via } f(x) = x+1 \\ f_2: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ via } f(x) = x+1 \end{array}\right\}$ injektiva!

ex: $f(x) = x^2$, $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv

$g(x) = x^2$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ej injektiv



Surjektiv avbildning ("på")

$\boxed{\text{$f: T \to U$ är \underline{surjektiv} om det för varje element $y \in U$ finns minst ett element $x \in T$ så att $f(x) = y$}}$

("hela målmängden används").

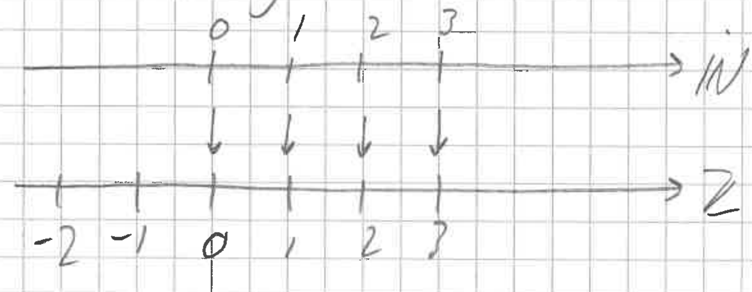
ex: inklusionsavbildningen $i: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ är inte surjektiv:

$y = f(x) = x$ där $x \in \mathbb{N}$ och $y \in \mathbb{Z}$

men inget x i $\mathbb{N}$ uppfyller

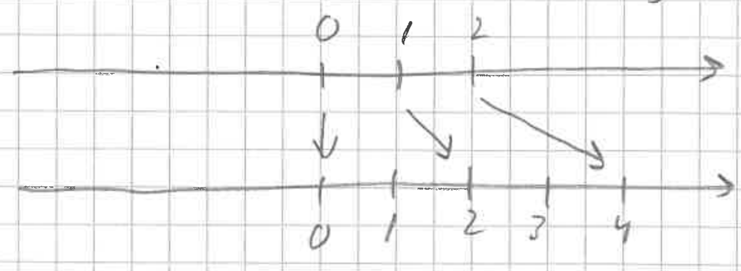
$-5 = f(x) = x \Rightarrow x = ?$

(inklusionsavbildning $T \subseteq U$ endast surjektiv om $T = U$)

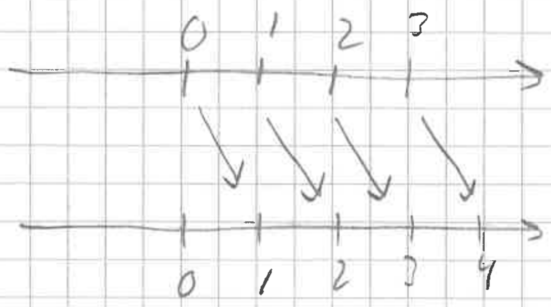


ex: f surjektiv $\Leftrightarrow$ målmängden = värdemängden

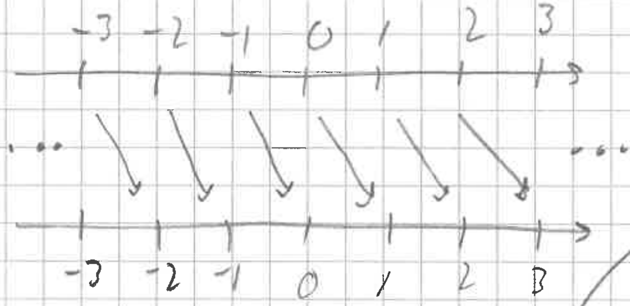
ex: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ via $f(x) = 2x$ ej surjektiv:



ex: $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ via $f(x) = x+1$ ej surjektiv:



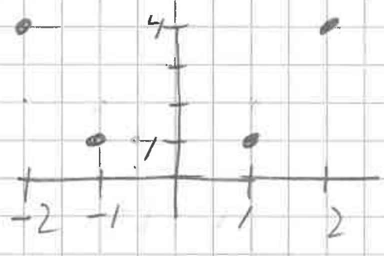
ex: $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ via $f(x) = x+1$ är surjektiv:



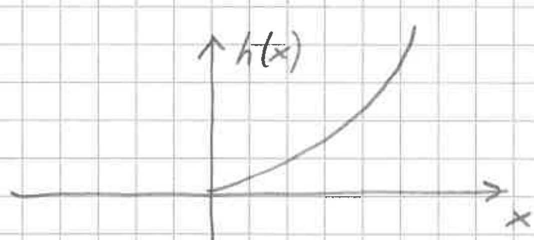
ej surjektiva

ex: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ via $f(x) = x^2$

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ via $g(x) = x^2$



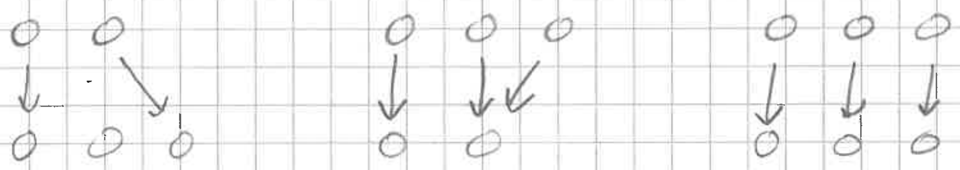
$h : \mathbb{R} \to \underbrace{\mathbb{R}_+}_{y \geq 0}$ via $h(x) = x^2$



surjektiv

Bijektiv avbildning

$f : T \to U$ är **bijektiv** om den är både surjektiv och injektiv

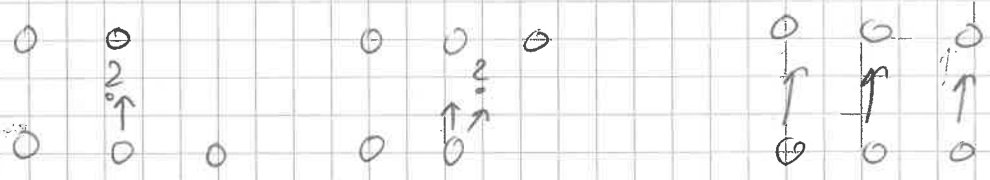


injektiv, ej surjektiv (varje värde träffas **högst** en gång)

surjektiv ej injektiv (varje värde träffas **minst** en gång)

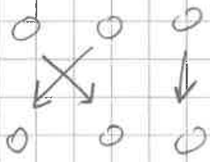
injektiv och surjektiv (varje värde träffas **exakt** en gång)

* En bijektiv avbildning parar ihop elementen mellan mängderna, d.v.s. "identifierar" mängderna. Kan inverteras:



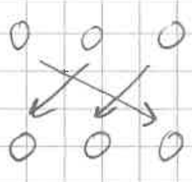
Ändliga mängder

∗ $f: T \to T$ injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv



(varje värde träffas **högst** en gång)

∗ $f: T \to T$ surjektiv $\Rightarrow$ f injektiv



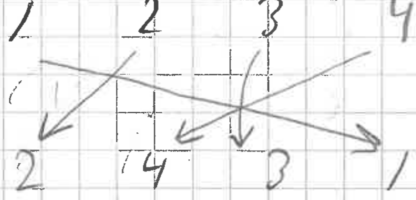
(varje värde träffas **minst** en gång)

Permutationer

> En **permutation** av talen $T_n = \{1, 2, \dots, n\}$ är en bijektiv avbildning $\sigma: T_n \to T_n$

exempel:

definition av **ett** σ:



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

säger var olika element hamnar

> Mängden av **alla** permutationer $\{\sigma\}$ kallas för **den symmetriska gruppen** S_n på n element

exempel:

T_4 har 4 element

S_4 har $4!$ element

ex: $n=1$: $T_1=\{1\}$ har 1 element

S_1 har 1 element: $\sigma: 1 \to 1$ (id)

ex: $n=2$: $T_2=\{1,2\}$ har 2 element

S_2 har 2 element:

$$\sigma_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ d.v.s. } \begin{matrix} \sigma(1)=2 \\ \sigma(2)=1 \end{matrix}$$

ex: godtyckligt n: $T_n=\{1,2,\dots,n\}$

S_n har $n!$ element σ_i, $i=1,\dots,n!$

$$\sigma_i: \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ kan väljas på n olika sätt; $\uparrow$ $(n-1)$ sätt; $\dots$; $\uparrow$ 1 sätt $= n!$

$\Rightarrow$ $\boxed{S_n \text{ har } n! \text{ olika element}}$

ex: $n=3$: $T_3=\{1,2,3\}$. S_3 har 6 element:

$$id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Inversioner

Givet en permutation σ av T_n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Talparet (i,j) kallas för en <u>inversion</u> om $i<j$ men $\sigma(i)>\sigma(j)$

<u>ex:</u> $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \underbrace{3 \quad 2}_{\text{inversion}} \end{bmatrix}$ $\binom{3}{2}=3$ möjliga talpar, varav en inversion

Permutationen σ sägs vara <u>jämn</u> (udda) om antalet inversioner är jämnt (udda), vilket betecknas $\text{sign}(\sigma)=+1$ $(\text{sign}(\sigma)=-1)$

<u>ex:</u> $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}$

är en <u>udda</u> permutation, $\text{sign}(\sigma)=-1$.

<u>ex:</u> $id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$ saknar inversioner, $\text{sign}(id)=+1$

<u>ex:</u> $S_2 = \{id, \sigma\}$ där $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

σ har en inversion, d.v.s. $\text{sign}(\sigma)=-1$

antal inversioner ↓

<u>ex:</u> S_3: jämna permutationer: $id\,(0)$, $\sigma_1\,(2)$, $\sigma_2\,(2)$

udda permutationer: $\sigma_{1,2}\,(1)$, $\sigma_{2,3}\,(1)$, $\sigma_{1,3}\,(3)$

Monstret

$A = A_{ij}$ är en $(n \times n)$-matris

Dess **determinant** är då talet

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

* tolkning: multiplicera ihop en faktor från varje rad
* faktorn väljs ur en kolumn som inte valts tidigare
* multiplicera med (-1) om permutationen är udda
* summera över alla permutationer

ex: S_2 har elementen $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=2$ och $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 15 - 8 = 7$$

ex: S_3 består av 6 element:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \overbrace{A_{11}A_{22}A_{33}}^{1\cdot 3\cdot 2} + \overbrace{A_{12}A_{23}A_{31}}^{2\cdot 2\cdot 1} + \overbrace{A_{13}A_{21}A_{32}}^{1\cdot 0\cdot 4}$$

(id) (σ_1) (σ_2)

$(+3\cdot 1 - 2\cdot 2 = -1)$

$(\sigma_{1,2})$ $(\sigma_{1,3})$ $(\sigma_{2,3})$

$$- \underbrace{A_{12}A_{21}A_{33}}_{2\cdot 0\cdot 2} - \underbrace{A_{13}A_{22}A_{31}}_{1\cdot 3\cdot 1} - \underbrace{A_{11}A_{23}A_{32}}_{1\cdot 2\cdot 4}$$

$$= 6 + 4 + 0 - 0 - 3 - 8 = -1$$

9

Övertriangulära matriser

A kallas <u>övertriangulär</u> om
$A_{ij} = 0$ när $i > j$

A övertriangulär
$\Rightarrow \det A = A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{nn}$

* exempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = +1 \cdot 8 \cdot 1 = 8$

ur sista raden måste vi välja 1
ur mellersta raden måste vi då välja 8
ur första raden måste vi då välja 1

$\sigma(1) = 1 \quad \sigma(2) = 2 \quad \sigma(3)$ är en jämn permutation

* allmänt: $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$

Nollskilt bidrag kräver $\sigma(n) = n$, d.v.s.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n, \text{ med } \sigma(n)=n} \operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n-1,\sigma(n-1)} \cdot A_{n,n}$$

Nollskilt bidrag kräver $\sigma(n-1) = n-1$, d.v.s.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n, \text{ med } \sigma(n)=n,\ \sigma(n-1)=n-1} \operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n-2,\sigma(n-2)} \cdot A_{n-1,n-1} \cdot A_{n,n}$$

Slutsats: bara en enda term bidrar, nämligen permutationen

$$\det A = \underbrace{\operatorname{sign}(\sigma)}_{+1} A_{11} \cdot A_{22} \cdot \ldots \cdot A_{n-1,n-1} \cdot A_{n,n} \quad \square$$