Mikael Smedbäck

F10: Determinantens egenskaper

Repetition

En permutation av talen

$$T_n = \{1, 2, \dots, n\}$$

är en bijektiv avbildning $\sigma : T_n \to T_n$

exempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Mängden av alla permutationer $\{\sigma\}$ kallas för den symmetriska gruppen S_n på n element

exempel: T_4 har 4 element

S_4 har $4!$ element

Talparet (i, j) kallas för en inversion om $i < j$ med $\sigma(i) > \sigma(j)$

exempel: Talparet $(1, 2)$ i exemplet ovan

* udda antal inversioner $\Rightarrow$ "udda permutation", $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$

Transpositioner

Permutationen

$$\sigma(p) = \tau_{i,j}(p) = \begin{cases} i & \text{om } p = j \\ j & \text{om } p = i \\ p & \text{annars} \end{cases}$$

håller för en transposition.

exempel: Välj $\sigma = \tau_{2,4}$ ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \tau_{2,4} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix}$$

* egenskaper:

$$\boxed{\begin{aligned} &\tau_{i,j} = \tau_{j,i} \\ &\tau_{i,j}\,\tau_{i,j} = id \\ &\mathrm{sign}(\sigma\tau_{i,j}) = -\mathrm{sign}(\sigma) \end{aligned}}$$

exempel:

$$\mathrm{sign}(id) = +1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(inga inversioner)

$$\mathrm{sign}(\tau_{2,4}) = -1 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

två nya inversioner (i par)

(2,4) ger en ny inversion

Repetition: determinant

$A = A_{ij}$ är en $(n \times n)$-matris

Dess determinant är då talet

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot A_{1,\sigma(1)} \cdot A_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot A_{n,\sigma(n)}$$

Multiplicera en rad med ett tal

B är matrisen som bildas genom att multiplicera en rad i A med talet c

$\Rightarrow \det(B) = c \cdot \det(A)$

Bevis: Rad p multipliceras med c:

$$B_{p,j} = c \cdot A_{p,j}$$

Determinanten blir

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{p,\sigma(p)} \cdots B_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot c \cdot A_{p,\sigma(p)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

$$= c \cdot \det(A) \qquad \square$$

Summaregeln

A är matrisen där varje element på rad p är på formen $A_{p,k} = B_{p,k} + C_{p,k}$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(B) + \det(C),$$

där B och C är lika med matris A, utom på rad p:

$$B = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ B_{p,1} & \cdots & B_{p,n} \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ C_{p,1} & \cdots & C_{p,n} \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

Bevis: Determinanten för matris A:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot A_{1,\sigma(1)} \cdots \underbrace{A_{p,\sigma(p)}}_{B_{p,\sigma(p)} + C_{p,\sigma(p)}} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

$$= \sum \operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots B_{p,\sigma(p)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

$$+ \sum \operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots C_{p,\sigma(p)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

$$= \det(B) + \det(C)$$

$\square$

Två lika rader

$$\boxed{\text{Om två rader i matrisen } A \text{ är lika:} \quad \Rightarrow \det A = 0}$$

Bevis: Låt rad p och q vara lika:

$$A_{p,k} = A_{q,k} \qquad k = 1, \dots, n \qquad (1)$$

Determinanten är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)} \qquad (2)$$

Givet en permutation $\sigma(i)$, inför τ:

$$\tau(i) = \begin{cases} \sigma(p) & \text{om } i = q \\ \sigma(q) & \text{om } i = p \\ \sigma(i) & \text{annars} \end{cases} \qquad (\text{transposition})$$

Då erhåller vi

$$A_{p,\tau(p)} = A_{p,\sigma(q)} \overset{(1)}{=} A_{q,\sigma(q)}$$

$$A_{q,\tau(q)} = A_{q,\sigma(p)} = A_{p,\sigma(p)}$$

$$A_{i,\tau(i)} = A_{i,\sigma(i)} \qquad (i \neq p \text{ och } i \neq q)$$

d.v.s.

$$A_{1,\tau(1)} \cdots A_{n,\tau(n)} = A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)} \qquad (3)$$

Varje term i (2) förekommer alltså två ggr, men med olika tecken:

$$\operatorname{sign}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)} + \underbrace{\operatorname{sign}(\tau\sigma)}_{-\operatorname{sign}(\sigma)} A_{1,\tau(1)} \cdots A_{n,\tau(n)} \overset{(3)}{=} 0$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0 \qquad \square$$

Radbyte

B är matrisen som bildats genom att byta plats på två rader i matrisen A

$\Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

Bevis:

$$C = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1}+A_{q,1} & \cdots & A_{p,n}+A_{q,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{p,1}+A_{q,1} & \cdots & A_{p,n}+A_{q,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

C är alltså matrisen A, men rad p och q är

Två lika rader $\Rightarrow \det(C) = 0$

"Summaregeln" på s. 4 ger nu

$$0 = \det(C) = \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{p,1} & \cdots \\ A_{p,1} & \cdots \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{q,1} & \cdots \\ A_{q,1} & \cdots \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{p,1} & \cdots \\ A_{q,1} & \cdots \end{pmatrix}}_{\det(A)} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{q,1} & \cdots \\ A_{p,1} & \cdots \end{pmatrix}}_{\det(B)}$$

$\Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

$\square$

Addera rad till annan rad

Addera en multipel av en rad till en annan rad i matrisen A ger matrisen B

$$\Rightarrow \det(B) = \det(A)$$

Bevis:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} A_{p,1} & \cdots & A_{p,n} \\ A_{q,1} + kA_{p,1} & \cdots & A_{q,n} + k\cdot A_{p,n} \end{pmatrix} \overset{\text{"Summaregeln" s. 4}}{=}$$

$$= \det\begin{pmatrix} A_{p,1} & \cdots & A_{p,n} \\ A_{q,1} & \cdots & A_{q,n} \end{pmatrix} + \overset{\text{satsen s. 3}}{k} \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} A_{p,1} & \cdots & A_{p,n} \\ A_{p,1} & \cdots & A_{p,n} \end{pmatrix}}_{=0 \text{ (satsen s. 5)}}$$

$$\Rightarrow \det(B) = \det(A) \qquad \square$$

Produkt av matris och elementär matris

$$\boxed{\begin{aligned} &E = \text{elementär } (n\times n)\text{-matris} \\ &A = (n\times n)\text{-matris} \\ &\Rightarrow \quad \det(EA) = \det(E)\cdot\det(A) \end{aligned}}$$

Bevis om $E = E_{pq}$, t.ex. $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} VL &= \det(EA) = \{\text{satsen på s. 6}\} = -\det(A) \\ HL &= \underbrace{\det(E)}_{\text{en transposition}}\cdot\det(A) = (-1)\cdot\det(A) \end{aligned}\right\} VL = HL \text{ ok}$$

Bevis om $E = E_p(k)$, t.ex. $E_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} VL &= \det(EA) = \{\text{satsen på s. 3}\} = k\cdot\det(A) \\ HL &= \underbrace{\det(E)}_{\text{diagonalmatris}}\cdot\det(A) = k\cdot\det(A) \end{aligned}\right\} VL = HL \text{ ok}$$

Bevis om $E = E_{ij}(k)$, t.ex. $E_{1,2}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(till rad 1 adderas k multiplar av rad 2)

$$\left.\begin{aligned} VL &= \det(EA) = \{\text{satsen s. 7}\} = \det(A) \\ HL &= \underbrace{\det(E)}_{\text{över- eller undertriangulär}}\cdot\det(A) = 1\cdot\det(A) \end{aligned}\right\} VL = HL \text{ ok}$$

Determinant och existens av matrisinvers

$$\boxed{\begin{array}{l} A = (n \times n)\text{-matris} \\ A \text{ inverterbar} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \end{array}}$$

Bevis: Enligt den tidigare satsen om existens (se s. 12) av matrisinvers: En matris A kan alltid skrivas: (R = reducerade trappstegsformen till A)

$$A = E_1 E_2 \cdots E_s \cdot R$$

Enligt satsen på s. 8 (rekursivt):

$$\det A = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_s)\cdot\det(R) \quad (1)$$

För R gäller (enligt den tidigare satsen, se s. 12)

$$R = I \Leftrightarrow A \text{ är inverterbar}$$

Antag A inverterbar $\Rightarrow \det R = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Antag A inte inverterbar $\Rightarrow \det R = 0 \Rightarrow \{(1)\} \Rightarrow \det A = 0$

Hur vet vi att $\det R = 0$?

Möjliga reducerade trappstegsformer:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & x \\ 0 & 1 & b & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$\det R_1 = \det I = 1$ $\qquad$ $\det R_2 = 0$

□

Exempel:

$$\begin{cases} tx + 2y + z = 3 \\ -y = 2 \\ x + y + tz = 1 \end{cases}$$

För vilka t har ekvationssystemet en unik lösning?

=

$AX = B$ har en unik lösning $\Leftrightarrow A^{-1}$ existerar

$\Leftrightarrow 0 \neq \det A = \det \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = -1 \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow 0 \neq -t^2 + 1 \Leftrightarrow t \neq \pm 1$

=

Men vet vi att $AX = B$ har unik lösning $\Leftrightarrow A^{-1}$ existerar?

* A^{-1} existerar $\Rightarrow$ unik lösning $X = A^{-1}B$

* Antag två lösningar X och Y: $AX = B = AY$,

d.v.s. $A(X - Y) = 0$

Enligt satsen om existens av matrisinvers, se s. 12:

$X = Y \Leftrightarrow A^{-1}$ existerar

d.v.s. unik lösning $\Rightarrow A^{-1}$ existerar. $\square$

Räkneregel för determinant: matrisprodukt

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ och } B \text{ är två } (n\times n)\text{-matriser} \\ \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) \end{array}}$$

Bevis: Satsen om existens av matrisinvers (se s. 12) ger

B singulär (ej inverterbar) $\Leftrightarrow$ $B\vec{v} = \vec{0}$ för något $\vec{v} \neq \vec{0}$

* Fallet B singulär: Ett $\vec{v} \neq \vec{0}$ existerar då så att:

B singulär $\Rightarrow B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow AB\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow AB$ singulär

* Fallet A singulär och B inverterbar:

Då existerar $\vec{v} \neq \vec{0}$ så att $A\vec{v} = \vec{0}$.

B inverterbar innebär $\vec{w} = B^{-1}\vec{v} \Leftrightarrow B\vec{w} = \vec{v} \neq \vec{0}$

d.v.s. $\vec{w}$ är också nollskild, $\vec{w} \neq \vec{0}$

Slutsats:

$$AB\vec{w} = ABB^{-1}\vec{v} = A\vec{v} = \vec{0}$$

d.v.s. (AB) är singulär (saknar invers)

* D.v.s. om minst en av A och B är singulära,

så är även (AB) singulär, d.v.s. $\det(AB) = 0$,

se satsen på s. 9. D.v.s. $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$

* Om både A och B är inverterbara:

Enligt sats om existens av matrisinvers (se s. 12):

$$A = E_1 \cdots E_r \quad \text{och} \quad B = F_1 \cdots F_s$$

Enligt sats på s. 8 (rekursivt):

$$\det(AB) = \det(E_1)\cdots\det(E_r)\det(F_1)\cdots\det(F_s) = \det(A)\cdot\det(B) \quad \square$$

Repetition: sats om existens av matrisinvers

$A = (n \times n)$-matris

Följande påståenden är ekvivalenta:

1. A^{-1} existerar
2. $A\vec{v} = \vec{0}$ bara för $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $A = E_1 \cdots E_s$ (E_i = elementära matriser)

(från föreläsning 8)

Determinanten av invers

Om matrisen A är inverterbar:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis: Givet:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Enligt satsen på s. 11:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$\square$

Om beräkning av determinanter

* Utför en elementär radoperation på matrisen A ger matrisen B:

$$EA = B$$

Enligt satsen s. 11:

$$\det(E) \cdot \det(A) = \det(B)$$

Vi vet att (se s. 8)

$\det(E) = -1$ (radbyte)(jfr. s. 6)

$\det(E) = k$ (rad multipliceras med k, jfr. s. 3)

$\det(E) = 1$ (rad adderas till annan rad, jfr. s. 7)

* Utför elementära radoperationer på matrisen, så att determinanten blir lättare att räkna ut!

Exempel:

Vad blir det(A), om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$?

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 3 \\ \times 2 \end{matrix} = (-1)\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} (-1)$$

$$= (-1)\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Övertriangulär form, determinanten ges av produkten av diagonalelementen!
(se sats från föreläsning 9)

$$\det(A) = (-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot 1 = \boxed{-1}$$