Mikael Smedbäck

F11: Markovkedjor

Utgångspunkt

9000 studenter

Alla äter hamburgare (H) eller pizza (P) till lunch.

Dag 1: 50% H 50% P d.v.s. $F_1 = (\underset{H}{4500}, \underset{P}{4500})$

Dag 2:

4500 H: 60% → H, 40% → P

4500 P: 80% → H, 20% → P

H	P	H	P
2700	1800	3600	900

d.v.s. $F_2 = (\underset{H}{6300}, \underset{P}{2700})$

Dag 3:

6300 H: 60% → H, 40% → P

2700 P: 80% → H, 20% → P

H	P	H	P
3780	2520	2160	540

d.v.s. $F_3 = (5940, 3060)$

Nu: samma sak med matriser

Inför $F_n = \begin{pmatrix} h_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{antal hamburgerätare} \\ \text{antal pizzaätare} \end{pmatrix}$

Rekursionsrelation:

$$F_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} F_n \qquad (n \geq 1)$$

Detta stämmer:

$$\begin{cases} h_{n+1} = 0,6 h_n + 0,8 p_n \\ p_{n+1} = 0,4 h_n + 0,2 p_n \end{cases}$$

denna summa måste vara $= 1$

En $(n \times n)$-matris A kallas för en stokastisk matris om

1) $A_{ij} \geq 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = 1$ för $1 \leq j \leq n$

---

ex: $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$ är en stokastisk matris

Många iterationer

$$F_2 = AF_1$$

$$F_3 = AF_2 = A(AF_1) = A^2F_1$$

$$F_4 = AF_3 = A(A^2F_1) = A^3F_1$$

$$\vdots$$

$$F_\infty = \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} A^{n-1}F_1$$

Diagonaliseringsteoremet (se s. 4) ger

$$O^{-1}AO = D$$

där

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad O^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Detta kan skrivas

$$A = ODO^{-1}$$

d.v.s.

$$A^n = \overbrace{(ODO^{-1})(ODO^{-1})\cdot\ldots\cdot(ODO^{-1})}^{n \text{ st. faktorer}}$$

$$= O\underbrace{D\cdot I\cdot D\cdot I\cdot\ldots\cdot I\cdot D}_{n \text{ st. faktorer}}\cdot O^{-1}$$

$$= O\cdot D^n\cdot O^{-1}$$

Överkurs: Diagonalisering

Egenvärden:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 0{,}6-\lambda & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (0{,}6-\lambda)(0{,}2-\lambda) - 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0 \iff \lambda = \begin{cases} 1 \\ -1/5 = -0{,}2 \end{cases}$$

Egenvektorer:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff (A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$$

$\lambda = +1$ ger

$$\begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = 2y \iff \vec{x} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -0{,}2$ ger

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x = -y \iff \vec{x} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diagonaliseringsmatriser kan konstrueras ur A:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonaliseringsteoremet: Givet en matris A:

$$\boxed{O^{-1}AO = D} \qquad O^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Här:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}$$

Slutfördelningen

Vi kan beräkna D^n (diagonalmatris):

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-0{,}2)^n \end{pmatrix}$$

Vi kan därför även beräkna A^n:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{s. 3}}}{A^n =} ODO^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0{,}2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Låt $n \to \infty$ ger

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0{,}2)^n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formeln för A^n blir då

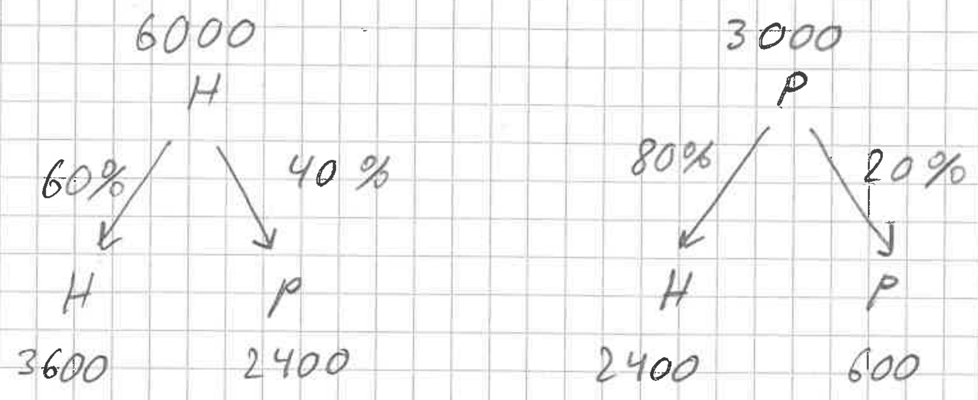
$$A^n \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Vi kan därför hitta slutfördelningen: (se s. 3)

$$F_\infty = \lim_{n \to \infty} A^{n-1} F_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4500 \\ 4500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

Efter många dagar äter 6000 studenter hamburgare och 3000 äter pizza varje dag.

Slutfördelningen är stabil



Utfallsvektorer

En utfallsvektor ger andel istället för antal.

Formellt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ uppfyller $x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y = 1$

exempel:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

$$F_\infty = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X \text{ utfallsvektor} \Rightarrow AX \text{ är utfallsvektor}}$$

Bevis:

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

* $a, b, c, d, x, y \geq 0 \Rightarrow ax + by \geq 0$ och $cx + dy \geq 0$ ok
* $a + c = 1$ och $b + d = 1$ och $x + y = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax + by + cx + dy = \underbrace{(a+c)}_{=1} x + \underbrace{(b+d)}_{=1} y = x + y = 1 \quad \text{ok}$$

$\square$

Markovkedja

Låt $\vec{x}_1$ vara en utfallsvektor i $\mathbb{R}^n$.
Låt A vara en stokastisk matris.
Följden

$$\{\vec{x}_1, A\vec{x}_1, A^2\vec{x}_1, A^3\vec{x}_1, \dots\}$$

kallas då för en Markovkedja.

exempel:

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix} \qquad F_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

genererar en Markovkedja via

$$F_{n+1} = A F_n = A^n F_1 \qquad n \geq 1$$

* diskreta "tidssteg"

* tillståndet i tidsögonblicket t_{n+1} bestäms fullständigt av tillståndet i tidsögonblicket t_n

Oberoende av initialvärde

Godtycklig initial fördelning:

$$F_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad (p+q=1)$$

Markovkedjan blir

$$F_n = A^{n-1} F_1 \qquad n \geq 1$$

Låt $n \to \infty$ ger

$$A^n \xrightarrow[\text{se s. 5}]{} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

d.v.s.

$$F_\infty = \lim_{n\to\infty} A^{n-1} F_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Den slutliga fördelningen blir således

$$F_\infty = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(p+q) \\ \frac{1}{3}(p+q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

* I detta fall är slutfördelningen tydligen oberoende av initialvärdet!

* Den stokastiska matrisen A avgör om slutfördelningen F_∞ beror på initialvärdet F_1.

* Ytterligare möjlighet: F_∞ existerar inte för vissa F_1.

<u>exempel:</u> $(F_\infty = F_1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H \arrow[dl, "100\%"'] \arrow[dr, "0\%"] & \\ H & & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & P \arrow[dl, "0\%"'] \arrow[dr, "100\%"] & \\ H & & P \end{tikzcd}$$

<u>exempel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H \arrow[dl, "0\%"'] \arrow[dr, "100\%"] & \\ H & & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & P \arrow[dl, "100\%"'] \arrow[dr, "0\%"] & \\ H & & P \end{tikzcd}$$

$F_\infty = \lim_{n \to \infty} A^{n-1} F_1$ existerar inte,

om $F_1 \neq \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$