2010-09-23

1

Komplexa tal

Motivation: Vissa ekvationer har inga lösningar i $\mathbb{R}$, t.ex.

$$x^2 + 1 = 0$$

Mål: Utvidga $\mathbb{R}$ till en större mängd (med samma räknesätten och räknelagar) där fler ekvationer kan lösas.

Def. Ett komplext tal z har formen

$$z = a + bi$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ och där i är en symbol som inte givits någon mening.

$$\mathrm{Re}(z) := a \quad ; \quad \text{realdelen}$$
$$\mathrm{Im}(z) := b \quad ; \quad \text{imaginärdelen}$$

Mängden av alla komplexa tal är

$$\mathbb{C} = \{ z = a + bi : a, b \in \mathbb{R} \}$$

(Notation: $a + i = a + 1i$; $a - bi = a + (-b)i$; $a = a + 0i$)

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Räkneoperationer

~~Def. Summan av två komplexa tal z = a +~~

Låt $z = a + bi$ och $w = c + di$ vara två komplexa tal.

Def. Summan av z och w är

$$z + w := (a + c) + (b + d)i$$

och differensen av z och w är

$$z - w := (a - c) + (b - d)i$$

Def. Produkten av z och w är

$$z \cdot w := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ex. Vi beräknar: $i^2 = i \cdot i = (0+1i)(0+1i)$
$= (0-1)+(0+0)i$
$= -1$

dvs. $z=i$ löser ekvationen $z^2+1=0$. (Ekvationen har också lösningen $z=-i$.)

(Algebrans fundamentalsats: Alla polynom-ekvationer har en lösning i $\mathbb{C}$.)

Anm. Vi kan identifiera $\mathbb{R}$ med $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\} \subseteq \mathbb{C}$.

~~$a \in \mathbb{R}$~~ ~~$a + 0i \in \mathbb{C}$~~ ~~a~~

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{a}{\cap}} = \underset{\mathbb{C}}{\overset{a+0i}{\cap}}$$

På så sätt blir $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(Addition, subtraktion och multiplikation är kompatibla

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{a}{\cap}} + \underset{\mathbb{R}}{\overset{b}{\cap}} = (a+0i)+(b+0i) = (a+b)+0i = \underbrace{a+b}_{\in \mathbb{R}}$$
)

Vill även införa division!

Def. Konjugatet av $z = a+bi$ är

$$\bar{z} := a - bi \in \mathbb{C}$$

och absolutbeloppet av z är

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$$

$(|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, dvs $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.)

Def. Låt $z = a+bi$ och $w = c+di \neq 0$. Kvoten av z och w är

$$\frac{z}{w} := \underbrace{\frac{1}{w\bar{w}}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{z\bar{w}}_{\in \mathbb{C}}$$

Ex. $z = 2+i$, $w = 1+i$. Vad är z/w?

$$\frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-i}{2}$$

reellt tal!

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

Anm. Räknelagar i $\mathbb{C}$:

- $0 \cdot z = 0$; $1 \cdot z = z$; $zw = wz$
- $0 + z = z$; $z + w = w + z$
- $(z+w)+v = z+(w+v)$; $(zw)v = z(wv)$
- $(z+w)v = zv + wv$ → Övning
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Ex. Vi ska lösa ekvationen $z^2 + 2z + 2 = 0$.
Använder kvadratkomplettering.

$$z^2 + 2z + 2 = (z+1)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^2 = -1$$

Vi använder att $w^2 + 1 = 0$ har lösningarna $w_1 = i$ och $w_2 = -i$.

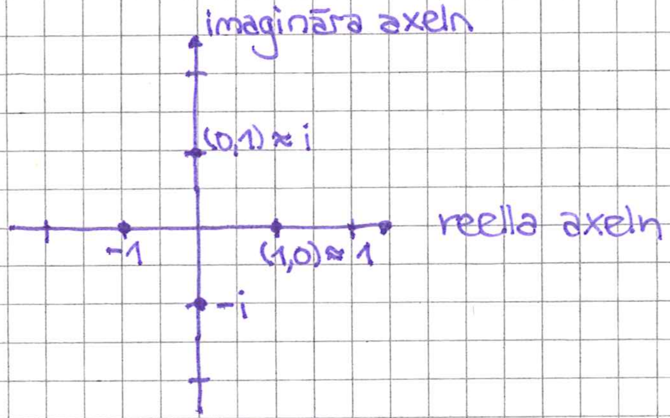
$$z_1 + 1 = i \Rightarrow z_1 = -1 + i$$
$$z_2 + 1 = -i \Rightarrow z_2 = -1 - i$$

Det är ingen slump att $\bar{z}_1 = z_2$. Allmänt resultat: z lösning $\Rightarrow \bar{z}$ lösning.

Det komplexa talplanet

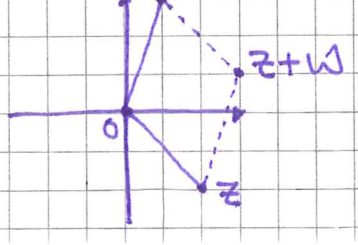
Vi ska göra följande identifikation:

komplext tal $z = a + bi$ $\leftrightarrow$ punkten i planet (a,b)



Vi kan tolka ~~addition~~ räkneoperationer geometriskt:

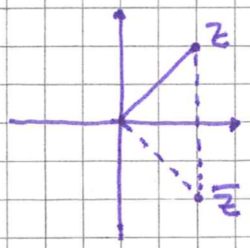
Ex Addition.



Konstruera parallelogram med $0, w, z$ som hörn.

Det fjärde hörnet blir $x + w$.

Ex. Konjugation



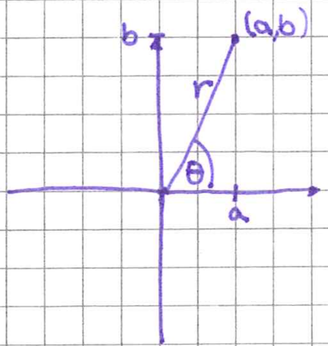
Spegla punkten i x-axeln.

Polär form

Vi kan beskriva punkter i planet på två olika sätt.
Vi ~~k~~ ska identifiera ett komplext tal $z = a+bi$ med punkten (a,b) i planet.

(a, b)
- x-koordinat
- y-koordinat

(r, θ)
- avstånd från origon
- vinkeln ~~mellan~~ som linjen mellan punkten och origon bildar med x-axeln



Vi kan beräkna de olika beskrivningar från varandra:

$$(a,b) \xrightarrow{r = \sqrt{a^2+b^2},\ \tan\theta = \frac{b}{a}} (r,\theta)$$

$$(r,\theta) \xrightarrow{a = r\cdot\cos\theta,\ b = r\cdot\sin\theta} (a,b)$$

Låt $z = a+bi \in \mathbb{C}$. ~~Vi skriver~~ ~~Då blir~~ Med

$$r = |z| \quad \text{och} \quad \theta := \arg(z)$$

Vi kan skriva ~~blir~~ $z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$. Detta kallas ~~är~~ polärformen för z.
för något $r \geq 0$ och $\theta \in [0, 2\pi)$.

~~Anm. Vi kan nu tolka multiplikation geometriskt.~~
Då är $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. $\theta := \arg(z)$ kallas argument av z.
~~$z = r\cdot(\cos\theta + i$~~

Def. Polarformen av z är $z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$ för $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Vad händer vid multiplikation när man använder polärformen?

Låt $z = r(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$
och $w = s(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ vara två komplexa tal givna på polärform.

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= rs\left[(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \cos\varphi\sin\theta)\right] \\ &= rs\left[\cos(\theta+\varphi) + i\cdot\sin(\theta+\varphi)\right] \end{aligned}$$

(Vi har använt additionssatsen för sinus och cosinus:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$
)

Alltså: Produkten av z och w fås genom att multiplicera deras absolutbelopp och att addera deras argument.

Den komplexa exponentialfunktionen

Def. Den komplexa exp.funktionen definieras genom:

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\cdot\sin\theta$$

Vi kan nu skriva ett komplext tal på polärform som

$$z = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cdot e^{i\theta}$$

Anm. Den kompl. exp. funk. uppfyller att

$$e^{i\theta}\cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

och den är periodisk:

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}$$

eftersom $e^{i\cdot 2\pi} = 1$.