Induktionsbevis

Används när man vill visa ett påstående som är formulerat för alla $n \in \mathbb{N}$ (eller alla $n \geq N_0$ för något N_0).

~~Består av två separa~~

Induktionsprincipen

Om ett påstående är formulerat för alla $n \in \mathbb{N}$ och det gäller:

(i) det är sant för $n=1$

(ii) Om det är sant för något $n \in \mathbb{N}$, så är det även sant för $n+1$.

Då är påståendet sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

(Alternativ: $\forall n \geq N_0$!)

Fungerar som en rad av domino brickor:

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ sant för $n=1$ $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ sant för $n=2$ $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ sant för $n=3$ $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ sant för $n=4$ $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ ...

(i) kallas basfall.

(ii) kallas induktionssteg.

Exempel. Visa att $\underbrace{1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}_{(*)}$ för alla $n \geq 1$.

Bevis.

Vi använder induktionsprincipen.

Basfall: Vi behöver visa att $(*)$ är sant för $n=1$.

$$\left.\begin{aligned} VL &= 1 \\ HL &= \frac{1(1+1)}{2} = 1 \end{aligned}\right\} VL = HL \Rightarrow (*) \text{ är sant för } n=1.$$

Induktionssteg: Antag att (*) är sant för något $n \geq 1$.
Vi behöver visa att det följer från det att (*) är sant för $n+1$.

Betrakta (*) för $n+1$:

$$VL = \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\text{enligt induktionsantagendet är denna summa lika med } \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

$$\Rightarrow VL = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\Rightarrow VL = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$HL = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\Rightarrow$ $VL = HL$ i (*) för $n+1$.

$\Rightarrow$ (*) är sant för $n+1$.

Enligt induktionsprincipen har vi visat att (*) är sant för alla $n \geq 1$.

$\square$ Bevis slut.

Polynom

Def. Ett polynom är en funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (eller $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) på formen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

för några $a_i \in \mathbb{C}$.

Talen a_i kallas koefficienter till f.

Nollpolynomet är funktionen $f(x) = 0$ (där alla $a_i = 0$) och noteras som $f = 0$.

Vi kan addera, subtrahera och multiplicera polynom enligt de vanliga räknereglerna.

Def. Polynomet f på formen $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, där $a_n \neq 0$, sägs vara av grad n. Vi skriver $\deg f = n$. ($\deg 0 = -\infty$).

Kan vi dividera polynom?

Eulers restsats för naturliga tal: Om $n, m \in \mathbb{N}$ med $m \neq 0$, så finns det unika q och r så att $n = q \cdot m + r$ och $r < m$.

Sats (Division med rest för polynom)
Låt f, g vara polynom där $g \neq 0$.
Då finns det polynom q och r sådana att
$f = q \cdot g + r$ och $\deg r < \deg g$.

Bevis.

Specialfall: $\deg g = 0. \Rightarrow g(x) = c$ för något $c \in \mathbb{C}, c \neq 0.$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{f(x)}{c} \cdot g(x) + 0.$$

~~det~~ alltså $q(x) = \frac{f(x)}{c}$ och $r(x) = 0$.

där $\deg r = -\infty < 0 = \deg g$.

Det allmäna fallet: Antag att $\deg g = m > 0$, dvs

$$g(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$$

Vi ska använda induktionsprincipen, där vi gör induktion över $\deg f$.

Basfall: Om $\deg f < m$, så är $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$ och vi kan välja $q(x) = 0$ och $r(x) = f(x)$ med $\deg r = \deg f < m = \deg g$.

Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för alla polynom av grad högst n (där $n \geq m-1$). Vi behöver visa att det följer då att det är sant för $n+1$ (där $n+1 \geq m$).

Låt f vara ett polynom av grad $n+1$ ~~≥m~~ (där $n+1 \geq m$).

$$f(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

Idé: Vi subtraherar en multipel av g från f för att få ett polynom av lägre grad.

Betrakta polynomet f_1 som ges av:

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} g(x)$$

$$= (a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_1 x + a_0) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} (b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0)$$

$$= \left(a_n - \frac{a_{n+1}}{b_m} \cdot b_{m-1}\right) x^n + \ldots + \left(a_{n+1-m} - \frac{a_{n+1}}{b_m} \cdot b_0\right) x^{n+1-m}$$

$$+ a_{n-m} x^{n-m} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Vi ser att $\deg f_1 \leq n$.

Enligt vårt induktionsantagande kan vi skriva:

$$f_1 = q_1 \cdot g + r$$

för polynom q_1 och r där $\deg r < \deg g$.

$$\Rightarrow f(x) = f_1(x) + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} g(x)$$

$$= \left(q_1(x) + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} \right) g(x) + r(x)$$

Vi kan sätta $q(x) = q_1(x) + \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m}$ och får att

$$f = q \cdot g + r \text{ där } \deg r < \deg g. \qquad \square$$

~~Enligt induktionsprincipen~~

Anmärkning Som i Eulers restsats, är q och r entydigt bestämda.

Definition. Polynomen q och r så att $f = q \cdot g + r$ och $\deg r < \deg g$ kallas kvoten och resten vid division av f med g.

Def. Vi säger att f är delbart med g om $f = q \cdot g$ för något polynom q.

Faktorsatsen

Def. $\alpha \in \mathbb{C}$ kallas ~~ett~~ rot till polynomet f om $f(\alpha) = 0$.

Sats Låt f vara ett polynom och $\alpha \in \mathbb{C}$.
α är en rot till f om och endast om f är delbart med $x - \alpha$.

Ex. Vi ska hitta alla rötter till polynomet $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Vi ser att $f(1) = 0$. Enligt Faktorsatsen kan vi hitta ett polynom $g(x)$ så att $f(x) = g(x) \cdot (x-1)$.

Beräkna $g(x)$ med polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
x^2 + 2x + 1 & \\
\hline
x^3 + x^2 - x - 1 & \big|\; x - 1 \\
-(x^3 - x^2) & \\
\hline
2x^2 - x - 1 & \quad (f(x) - x^2 g(x) = 2x^2 - x - 1) \\
-(2x^2 - 2x) & \\
\hline
x - 1 & \quad (f(x) - (x^2+2x)(x-1) = x - 1) \\
-(x - 1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$$f(x) \downarrow f(x) - \frac{a_n}{b_m} g(x)$$

Alltså är $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x - 1)$
$= (x+1)^2 (x-1)$

f har rötterna $x = 1$ och $x = -1$.

$x = 1$ är en rot av multiplicitet 1.
$x = -1$ är en rot av multiplicitet 2.

~~Cliffhänger:~~