1. Matrisaritmetik

1.1. **Matrisaritmetik.** Vi skall definiera något som kallas (2×2)-matriser, och sedan utveckla aritmetik på dessa. Matriserna är inte tal, men kan nästan behandlas som tal.

Definition 1.2. En (2×2)-matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är fyra reella tal a, b, c, d ordnade i ett rektangel.

Bemärkning 1.3. När vi i detta kapitlet skriver matris menar vi alltid en (2×2)-matris.

Exempel 1.4. Exempler på matriser är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definition 1.5. Två matriser $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ adderas och ger en ny matris

$$A + B = \begin{bmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{bmatrix}.$$

Exempel 1.6. Vi ser att $A + B = B + A$.

1.7. **Skalärprodukt.** Vi har att

$$A + A = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix},$$

och detta vill vi skriva som $2A$. Vi gör följande definition.

Definition 1.8 (Skalarmultiplikation)**.** För varje tal k, och varje matris A, definierar vi matrisen

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}.$$

1.9. Av definition av skalärprodukt får vi att

$$\underbrace{A + A + \cdots + A}_{n \text{ kopior}} = n \cdot A.$$

Vi har också att

$$0 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen som bara består av nollor kallas noll-matrisen av uppenbara skäl. Vi skriver $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ för denna matris. Och vi har

$$0 \cdot A = 0.$$

Märk att 0 i vänstreledet ovan är talen 0, medan 0 i högerledet ovan är noll-matrisen. Vi har också den trevliga identiteten av matriser

$$A + 0 = A.$$

Mera notation. Vi har

$$-1 \cdot A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}.$$

Vi vill i fortsätningen skriva $-A$ för matrisen $-1 \cdot A$. Detta betyder att vi istället för $B + -1 \cdot A$ skriver $B - A$. Märk också att vi nu har

$$\underbrace{-A - A \cdots - A}_{n \text{ kopior}} = -n \cdot A.$$

Exempel 1.10. Vi kan nu lösa matrisekvationer på formen

$$4X + 2A = B,$$

där A och B är givna matriser. Vi adderar matrisen $-2A$ på båda sidor och får att vänsterledet blir

$$4X + 2A - 2A = 4X + 0 = 4X,$$

medan högerledet blir $B - 2A$. Sedan multiplicerar vi ekvationen med skalären $\frac{1}{4}$, vilket ger

$$X = \frac{1}{4}B - \frac{1}{2}A.$$

1.11. Matrismultiplikation. Vi har definierad addition (och subtraktion) av matriser, samt skalärmultiplikation. Vi vill också ha multiplikation, två matriser skall multipliceras ihop och ger en matris. Innan vi definierar detta vill vi skriva matriserna lite annorlunda. En matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,1} \end{bmatrix}$$

består av två rader och två kolonner. Talen i matrisen kallas koefficienter och är indexerade efter vilken rad och kolonn dessa står placerad i. Koefficient $a_{1,2}$, t.ex. är i rad 1 och kolonn 2.

Definition 1.12. Låt $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$ vara två matriser. Vi definerar produkten AB som matrisen

$$AB = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}$$

där koefficienterna ges av följande formler

$$\begin{aligned} c_{1,1} = &\quad a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} \\ c_{1,2} = &\quad a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ c_{2,1} = &\quad a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} \\ c_{2,2} = &\quad a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{aligned}$$

Bemärkning 1.13. Ser ni mönstret i galskapen, och speciellt hur man kommer ihåg formlerna utan att lära dessa utantill? Om du inte ser mönstret be någon, mig t.ex. för att förklara hur man utför matrisprodukten.

Exempel 1.14. Vi har att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Märk att AB inte alltid är det samma som BA. T.ex, har vi att

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

vilket inte är lika med produkten ovan. Vidare har vi att nollmatrisen multiplicerad med en godtycklig matris ger nollmatrisen $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$.

Definition 1.15. Vi definierar identitetsmatrisen $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.16. Identitetsmatrisen fungerar som talet 1 med avseende på matrismultiplikation. Vi har nämligen att

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,1} \end{bmatrix}.$$

Det vill säga att $1 \cdot A = A$ för varje matris A. Vi har också att $A \cdot 1 = A$, vilket läsaren uppmuntras kolla.

Sats 1.17. *Låt A, B och C vara godtyckliga matriser. Vi har att matrisprodukten är associativ, det vill säga*

$$(AB)C = A(BC).$$

Proof. See Uppgift 4. □

Definition 1.18. En matris A är *inverterbar* om det finns någon matris B sådan att

$$AB = 1 \quad \text{och} \quad BA = 1.$$

En matris som inte är inverterbar kallas singuljär.

Exempel 1.19. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

är inverterbar. Detta fördi matrisen

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

har egenskapen att $AB = BA = 1$ (Kolla!).

Exempel 1.20. Nollmatrisen är uppenbarligen singuljär. Ett annat exempel är matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Att matrisen A är singuljär kan man visa på följande sätt. Antaga att A är invertebar. Då finns en matris $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sådan att $AB = BA = 1$. Produkten AB är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ 2a & 2c \end{bmatrix}.$$

Om denna produkt skulle vara lik med identitetsmatrisen måste $a = 1$ och $2a = 0$, och $c = 0$ och $2c = 1$. Detta är omöjligt. Detta betyder att matrisen A inte kan vara inverterbar, vilket betyder att matrisen är singuljär.

Sats 1.21. *Om matrisen A är inverterbar då finns det enbart en matris B sådan att $AB = BA = 1$.*

Proof. Låt B och C vara två matriser sådana att $AB = BA = 1$ och $AC = CA = 1$. Vi skall visa att $B = C$. Vi har

$$B = B \cdot 1 = B \cdot (AC) = (BA) \cdot C = 1 \cdot C = C.$$

vilket var vad vi skulle visa. □

1.22. Om en matris A är invertebar då kallas matrisen B som är sådan att $AB = BA = 1$ för inversen till A. Inversen till A betecknar vi med A^{-1}.

Exempel 1.23. Om vi nu har en matrisekvation $AX = B$, där A och B är givna matriser, och X är den sökta matrisen. Om vi har att matrisen A är inverterbar, då kan vi lösa denna uppgift på vanligt sätt, det vill säga som om det handlade om vanliga tal. Ekvationen $AX = B$ multiplicerar vi med A^{-1}, från vänster, och vi får att

$$A^{-1}AX = 1 \cdot X = A^{-1}B.$$

Det vill säga att $X = A^{-1}B$.

2. Uppgifter och läshänvisningar

Uppgift 1. Beräkna matriserna AB, BA och A^2 när

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 2. Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vara en matris där $ad - bc \neq 0$. Definiera matrisen

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Använd matrisen B för att visa att matrisen A är inverterbar.

Uppgift 3. Använd Uppgift 2 för att konstruera inversen till matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 4. Använd matriserna i uppgift 3 för att bestämma matrisen X i följande tre uttryck

$$a)\ AX = B \quad b)\ XA = B \quad \text{och} \quad c)\ AXB = 1.$$

Uppgift 5. Betrakta tre godtycklig matriser A, B och C. Beräkna först AB och BC, och sedan $(AB)C$ och $A(BC)$. Om du nu har räknat rätt har du att de två matriserna är lika, det vill säga $(AB)C = A(BC)$, och du har visat Sats **??**.

3. Nyttig information

Koden till dörren vid plan sju, som ni måste passera för att komma in är: 3127 (tror jag).

Nästa föreläsning sker 27 september, rum 3733, 15.30-17.00. Vi syns.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: skjelnes@kth.se