

KTH:s Matematiska Cirkel

Prisfråga - Hilberts hotell

Problem

Hilberts hotell står tomt på morgonen. Under dagen anländer oändligt många gäster till hotellet och vill få rum. Den första kommer kl 12, den andre kl 18, den tredje kl 21 och den fjärde halv elva – varje ny gäst kommer halvvägs till midnatt jämfört med när föregående kom.

Receptionisten placerar ut varje gäst enligt ett enkelt system: hon sätter den nya gästen i rum nummer ett, och låter alla tidigare gäster flytta till rummet som kommer efter deras nuvarande.

När klockan slår tolv har oändligt många gäster inkvarterats, och receptionisten går en runda för att titta till gästerna. Vad upptäcker hon då?

Lösning

Hotellet står tomt vid midnatt.

Detta verkar aningen förvirrande eftersom oändligt många gäster har anlånt till hotellet under kvällen och fått ett rum tilldelat. Men det gäller att inse att alla dessa gäster också har flyttat till nästa rum oändligt många gånger under kvällen vilket konstigt nog medför att alla rum är tomma i slutändan. Man kan tänka informellt på det som att alla gäster har flyttat iväg till ett "rum i oändligheten".

Vi visar att hotellet är tomt med ett motsatsbevis.

Antag att rum nummer n är upptagen vid midnatt. Eftersom ingen gäst byter rum efter midnatt, så befinner sig alltså en gäst i rum n . Låt oss anta att det är gäst nummer m . Vi vet att när gäst nummer m kom fram till hotellet, fick hon rum nummer 1 tilldelat. Sedan flyttade hon ett rum vidare för varje ny gäst som kom. Därmed befann sig gäst nummer m i rum nummer n efter att $m + n - 1$ gäster hade kommit till hotellet men bara så länge tills den $(m + n)$:te gästen kom. Då flyttade gäst nummer m till rum nummer $n + 1$. Eftersom inga gäster nånsin under kvällen flyttar från

rum med högre nummer till rum med lägre nummer, visar detta att gäst nummer m inte kan befinna sig i rum nummer n vid midnatt.

Alltså kan ingen gäst befinna sig i rum nummer n och detsamma gäller även för alla andra rum. Hotellet står tomt.

Kommentar

Observera att det är en skillnad mellan problemet som det ställdes ovanför och följande variant: Istället för att alltid ge nya gästen rum nummer ett, så får den n :te gästen rum nummer n . Därmed kommer ingen gäst behöva flytta från sitt rum till ett annat under kvällen efter att den har anlänt. I detta fall är hotellet fullt vid (och strax efter) midnatt. Vi kan visa att för varje rum gäller följande: Det finns det en tidspunkt innan midnatt, där en gäst kom och tog beslag på rummet. Efter denna tidspunkt flyttade gästen inte ut från rummet igen, alltså är rummet upptaget vid midnatt.