KTH Engineering Sciences

KTH:s Matematiska Cirkel

Den matematiska analysens grunder

Katharina Heinrich
Dan Petersen

Institutionen för matematik, 2012–2013
Finansierat av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse

Innehåll

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som litteratur till KTH:s Matematiska Cirkel under läsåret 2012–2013 och består av sju avsnitt. Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju föreläsningarna. En bra idé kan vara att försöka läsa varje kapitel själv innan föreläsningen, så att man redan innan vet vad målet med föreläsningen är och vad som kan visa sig vara svårt.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. Dessa är dels ordnade efter ungefärlig svårighetsgrad: övningar kan ha en ($\star$), två ($\star\star$) eller tre ($\star\star\star$) stjärnor. Dessutom har de udda övningarna facit längst bak i kompendiet och syftet med dessa är att eleverna ska kunna räkna dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. De med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas räknestugor på KTH där eleverna kan räkna uppgifter tillsammans, och få hjälp av oss.

Vi vill dock betona att få av uppgifterna är helt enkla. Detta betyder dels att läsaren inte bör titta i facit efter några få minuter, utan att först prata med kompisar om uppgiften, kanske lägga den åt sidan ett tag och tänka på annat, och sedan försöka lite till. Dessutom innebär det att få av eleverna kommer att kunna klara samtliga uppgifter, så ett krav på att eleven ska ha löst alla uppgifter bör inte ingå i examinationen. Dock rekommenderar vi starkt att alla elever åtminstone tittar på och försöker sig på alla övningar.

De flesta övningar kommer att ha många olika möjliga lösningar och det som står i facit bör endast ses som ett förslag.

KTH:s Matematiska Cirkel finansieras av Marianne och Marcus Wallenbergs Stiftelse. Vi tackar Dan Laksov och Roy Skjelnes, Institutionen för Matematik vid KTH och Alan Sola vid University of Cambridge för givande kommentarer om denna skrift.

Några ord om Cirkeln

KTH:s Matematiska Cirkel, i dagligt tal benämnd Cirkeln, startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier. Lärarna på Cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet eller förslag till annan förkovran inom matematik.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övriga uppgifter om KTH:s Matematiska Cirkel finns tillgängligt på

`http://www.math.kth.se/cirkel`

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om KTH:s Matematiska Cirkel och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygsättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut. I det perspektivet blir det lätt att använda de officiella kriterierna:

Godkänd: Eleven har viss insikt i de moment som ingår i kursen och kan på ett godtagbart sätt redovisa valda delar av kursen såväl muntligt som skriftligt. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Väl godkänd: Eleven har god insikt i flera moment från kursen. Eleven kan redovisa dessa moment både skriftligt och muntligt och dessutom uppvisa lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Mycket väl godkänd: Eleven har mycket god insikt i flera moment av kursen och lämnar skriftliga redovisningar av flera delar av kursen eller lämnar lösningar på problem som givits på kursen. Detta kan ske genom att eleven håller föredrag inför klassen, redovisar eller lämnar en rapport till sin matematiklärare.

Det är också till exempel möjligt att skolorna samarbetar, så att elever från en skola redovisar eller lämnar rapport för en lärare i en annan skola.

Författarna, augusti 2012

1 Grundläggande begrepp och bevisföring

I det här kapitlet kommer vi att ge en introduktion till matematisk bevisföring. Som fallstudie kommer vi att bevisa att *talet* $\sqrt{2}$ *är irrationellt*. Innan dess kommer vi dock att introducera lite terminologi. I matematiken använder man ofta *mängder* och *funktioner* som ett bekvämt språk för att beskriva saker och ting, och detta kommer vi också att göra i detta kompendium. Vi ger därför en introduktion till denna terminologi.

1.1 Mängder

Låt oss titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En *mängd* är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för *element* i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Ett sådant exempel är

$$A = \{1, 3, a, 7\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a$ och 7. Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

En mängd kan också ha oändligt många element, och då går det inte att skriva ned alla element. Ett exempel på en oändlig mängd är

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

De tre punkterna betyder här att *alla* positiva heltal ingår i mängden.

Exempel 1.1.1. Mängden som består av alla udda heltal mellan 0 och 10 kan också skrivas som

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}. \qquad \blacktriangle$$

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x *tillhör* A. Exempelvis gäller $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett element x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den *tomma mängden* innehåller inga element och betecknas $\varnothing$.

Definition 1.1.2. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en *delmängd* till B. Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.1.3. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. $\blacktriangle$

Ett användbart sätt att beskriva en mängd är som en delmängd av en annan mängd. Det finns ett speciellt skrivsätt för detta, nämligen

$$\{x \in D \mid \text{villkor på } x\}.$$

Med detta menar man delmängden bestående av de element i mängden D som uppfyller de givna villkoren. Som exempel kan vi definiera

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} \mid n \text{ är udda, }\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} \mid y > 2\}.$$

Mängden B är delmängden av de positiva heltalen som består av alla udda positiva heltal, medan C är delmängden av $\{1, 2, 3, 4\}$ bestående av element större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Exempel 1.1.4. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A \mid x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A \mid x < 3\} = \varnothing$. Vidare har vi att $4 \in A$ men $4 \notin B$. ▲

Definition 1.1.5. Antag att A och B är mängder. *Unionen* av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. *Snittet* av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$. *Differensen* av A och B består av alla element som ligger i A men inte ligger i B, och betecknas $A \setminus B$. Mängderna A och B kallas för *disjunkta* om $A \cap B = \varnothing$.

Exempel 1.1.6. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{5, 8, 3, 4711\}$ och $C = \{2, 4, 7, 8\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 8, 4711\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $B \cap C = \{8\}$ och mängderna A och C är disjunkta. Dessutom gäller att $A \setminus B = \{1, 6\}$ och $B \setminus A = \{8, 4711\}$. Till skillnad från unionen och snittet är differensen av två mängder inte symmetrisk i A och B. ▲

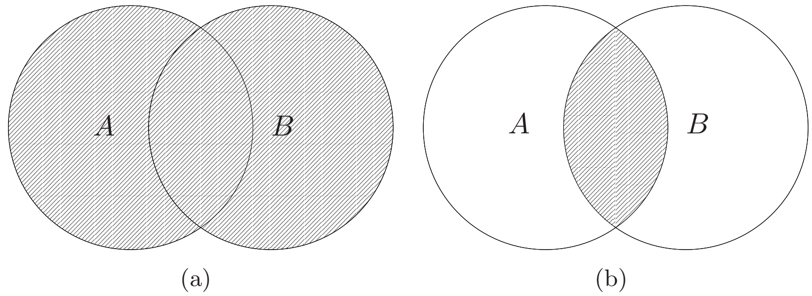
Ett användbart sätt att åskådliggöra union, snitt och differens är med hjälp av så kallade *Venndiagram*, som visas i Figur 1.1 och Figur 1.2.

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de *naturliga talen* $\{1, 2, 3, \dots\}$. Denna mängd betecknas $\mathbb{N}$. Tar vi med negativa tal och noll får vi heltalen

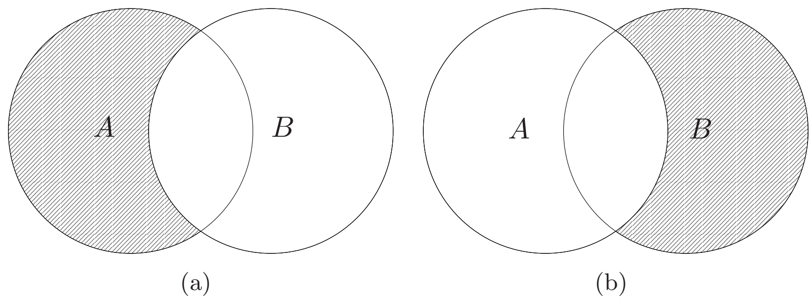
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *Zahl* som betyder tal. Mängden av alla kvoter av två heltal $\frac{p}{q}$ där $q \neq 0$ innehåller till exempel $\frac{2}{3}, -\frac{7}{243}$ och $\frac{25}{1}$. Vi kallar mängden de *rationella talen* och betecknar den med $\mathbb{Q}$. Slutligen betecknar vi med $\mathbb{R}$ de *reella talen*, det vill säga alla tal på tallinjen, exempelvis $0, -1, \frac{3}{2}, -\frac{527}{3}, \sqrt{2}$ och π. Notera att

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$



Figur 1.1: Venndiagram som åskådliggör mängderna (a) $A \cup B$ och (b) $A \cap B$.



Figur 1.2: Venndiagram som åskådliggör (a) $A \setminus B$ och (b) $B \setminus A$.

Låt oss i förbifarten anmärka att i detta kompendium kommer ett tal n att kallas: *positivt* om $n > 0$; *negativt* om $n < 0$; *icke-positivt* om $n \leqslant 0$ och *icke-negativt* om $n \geqslant 0$. Mängden av alla icke-negativa reella tal betäcknar vi med $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Exempel 1.1.7. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ är positivt}\}$. ▲

Exempel 1.1.8. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2 \cdot k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2 \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. ▲

Exempel 1.1.9. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A. ▲

1.2 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$. Detta är ett exempel på en funktion. Formeln säger att om vi tar ett tal $x \in \mathbb{R}$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de reella talen till de reella talen, eftersom både det vi stoppar in, x, och det vi får ut, $f(x)$, är reella tal. Vi brukar beteckna detta med $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definition 1.2.1. Låt X och Y vara mängder. En *funktion* $f\colon X \to Y$ är ett sätt att till varje element $a \in X$ tilldela ett välbestämt element $b \in Y$. Vi skriver $f(a) = b$. Vi säger att a *avbildas* på b och att b är *bilden* av a.

Anmärkning 1.2.2. Ofta säger man att f är en funktion från X till Y istället för att använda beteckningen $f\colon X \to Y$. Ett vanligt alternativ till ordet funktion är *avbildning*.

Exempel 1.2.3. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Ett exempel på funktion en $f\colon A \to B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$. Per definition måste vi ha $f(x) \in B$ för alla $x \in A$, och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 1 \in B, \quad f(2) = 4 \in B \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden $A = \{1, 2, 3\}$ kan man till exempel definera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

Exempel 1.2.4. Låt $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara den funktion som definieras av formeln $h(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$. Vi har exempelvis att

$$h(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 1^3 = \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad h(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 - (-2)^3 = 14.$$

▲

Anmärkning 1.2.5. När det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar använder vi också notationen

$$x \mapsto f(x),$$

”x avbildas på $f(x)$”. Till exempel skriver vi $x \mapsto x^3 - 2x + 5$ i stället för $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

1.3 Matematisk bevisföring

Denna kurs kommer i huvudsak att handla om *bevis* av matematiska påståenden; varje föreläsning kommer att innehålla flera bevis, och en majoritet av övningsuppgifterna går ut på att bevisa någonting. Detta innebär antagligen en omställning från tidigare kurser i matematik. Men vad är då ett bevis egentligen? Här är en möjlig definition.

Definition 1.3.1. Ett *bevis* av ett *påstående* är en *logisk slutledning* som leder från en överenskommen uppsättning av *antaganden* fram till påståendet.

Det förekommer flera viktiga ord i föregående definition. Låt oss diskutera dem ett i taget.

Definition 1.3.2. Ett *påstående* är en logisk utsaga som antingen är sann eller falsk.

Exempel 1.3.3. Här är några exempel på påståenden:

(i) $2A + 5B > -C^2$.

(ii) $X \subseteq (Y \cap Z)$.

(iii) Alla jämna tal är delbara med 3.

(iv) Talet $\sqrt{2}$ är inte rationellt.

Av dessa vet vi inte om de första två är falska eller sanna, eftersom vi inte vet vad A, B, C respektive X, Y, Z betyder. Det tredje påståendet är falskt: ett motexempel ges av det jämna talet 2 som ej är delbart med 3. Det fjärde påståendet är sant och kommer att bevisas i detta kapitel. ▲

Exempel 1.3.4. Här är också några exempel på saker som *inte* är påståenden.

(i) $x^2 + 6x + 5$

(ii) Mängden av alla jämna tal. ▲

Påståenden kan kombineras på många olika sätt, som påminner om de sätt vi kan skapa nya mängder av gamla genom operationerna $\cap$, $\cup$ och $\setminus$. Till exempel kan vi sätta två påståenden bredvid varandra och skriva ordet ”och” emellan, och vi får ett nytt påstående. Ett annat ord man kan sätta mellan två påståenden är ”eller”. En annan sak man kan göra är att skriva ”Det är inte sant att...” före ett påstående, och detta ger också ett nytt påstående.

Men viktigast av alla sätt att skapa nya påståenden ur gamla är kanske följande.

Definition 1.3.5. Låt P och Q vara två påståenden, till exempel några av de som stod i vår lista. Med $P \implies Q$ menar vi följande påstående: ”om påståendet P är sant, är även påståendet Q sant.” I ord säger vi att P *implicerar* Q eller att P *medför* Q. Om $P \implies Q$ och $Q \implies P$ så skriver vi att $P \iff Q$. I ord säger vi att P gäller *om och endast om* Q gäller.

För varje par av påståenden P och Q får vi alltså ett nytt påstående, $P \implies Q$. Sanningshalten av $P \implies Q$ kan utläsas ur Tabell 1.

P	Q	$P \implies Q$
sant	sant	sant
sant	falskt	falskt
falskt	sant	sant
falskt	falskt	sant

Tabell 1: Hur $P \implies Q$ beror på P och Q.

Ur Tabell 1 ses speciellt att $P \implies Q$ alltid är sant om P är falskt. Detta kan verka ointuitivt till en början. Ett motiverande exempel för denna princip kan vara följande mening som man kan få höra på en biograf: ”Om du har en mobiltelefon med dig, är den avstängd?” Om man inte har sin mobiltelefon med sig skall man alltid svara ”Ja”, oavsett om man har stängt av den eller inte.

Exempel 1.3.6. Det gäller att

$$5a + b = 0 \implies 5a = -b.$$

Här gäller även den omvända implikationen, så vi hade kunnat skriva $\iff$ i stället för $\implies$. Vi har också att

$$5a = -b \implies 5ac = -bc,$$

men här är omvändningen inte nödvändigtvis sann. För att gå från det vänstra påståendet till det högra måste vi nämligen dela med c, vilket vi inte vet är tillåtet om vi inte vet att $c \neq 0$. Vi har dock att

$$5a = -b \iff 5ac = -bc \text{ och } c \neq 0.$$ ▲

Exempel 1.3.7. Påståendet

$$\pi > e \implies (\text{Alla jämna tal är delbara med 3})$$

är falskt, eftersom det första påstående är sant medan det andra är falskt. Dock är påståendet

$$(\text{Alla jämna tal är delbara med 3}) \implies \pi > e$$

lustigt nog sant enligt vår definition av $\implies$. ▲

Exempel 1.3.8. För varje påstående P gäller att $P \implies P$, oavsett om P är sant eller inte. ▲

Definition 1.3.9. En *logisk slutledning* är en sekvens av påståenden

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

med egenskapen att $P_i \implies P_{i+1}$ för alla i.

Definition 1.3.10. Ett *antagande* är ett påstående som vi förutsätter är sant. Ibland kallas dessa synonymt för *axiom* eller *postulat*.

Vi vet nu alltså vad ett bevis av ett påstående Q är: det är en kedja av mindre, enklare påståenden som låter oss dra slutsatsen att Q är sant, endast utgående ifrån en mindre uppsättning antaganden som vi i förväg har bestämt oss för att starta med.

När vi skriver ett bevis brukar vi dock inte bara skriva en lång följd av påståenden med $\implies$ mellan – i stället brukar man försöka uttrycka beviset i vanliga ord och meningar. I stället för symbolen $\implies$ används konstruktioner som ”vilket innebär att...” eller ”eftersom... så...” eller ”från vilket vi drar slutsatsen att...”, och så vidare.

Speciellt värt att nämna är begreppet *motsägelsebevis*. Detta är en speciell bevisteknik där man i stället för att visa att ett påstående P är sant, så bevisar man att det *inte kan vara falskt*. Med detta menar vi att man börjar med antagandet att P inte gäller, och försöker att härleda ett påstående som man vet inte stämmer, som att $0 = 1$. Enligt Tabell 1 så kan bara ett falskt påstående implicera ett falskt påstående, så vårt antagande att P inte gällde måste ha varit falskt.

Om denna förklaring känns abstrakt, blir det förhoppningsvis mer konkret i det bevis som kommer i slutet av detta kapitel, där ett motsägelsebevis används.

I detta kompendium kommer vi att förutsätta att läsaren känner till följande:

(i) De olika sorternas tal: heltal, rationella, reella.

(ii) Hur man jämför tal med varandra: relationerna $\leqslant$, $\geqslant$ och $=$ samt olika varianter såsom $<, >$ och $\neq$.

(iii) Operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, och deras grundläggande räkneregler, såsom att $a+b = b+a$ eller att $0 \cdot a = 0$ för alla a.

(iv) I några av exemplen och uppgifterna förekommer funktioner som sin, cos, exp och log och några av deras egenskaper, utan att dessa har definierats formellt i texten. Vi vill dock betona att själva teorin (det vill säga, satserna och bevisen) inte förutsätter kännedom om dessa funktioner.

I beviset i nästa delavsnitt använder vi oss också av begreppet *delbarhet* för heltal: att vid division av två heltal blir resultatet inte alltid ett heltal (som vid divisionen $2/5$), och i det fall att resultatet blir det (som vid $14/7 = 2$) så säger vi att 14 är *delbart* med 7. Begreppet förekommer inte i senare kapitel.

I så stor utsträckning vi bara kan kommer vi att försöka påpeka om vi i ett bevis använder oss av ett antagande som inte står med på denna lista. Det här är inte så lätt som det låter: ofta smyger det sig in ett antagande i ett bevis man inte har tänkt på att man använder, eller så tar man något för givet som egentligen inte är uppenbart.

Vår lista på antaganden är inte så precist formulerad: vi skriver bara ”grundläggande räkneregler”, men räknar inte upp alla dessa. Vi ber om läsarens överseende.

1.4 Ett bevis

För att inte denna första föreläsning endast skall bli till torrsim, kommer vi nu att bevisa ett påstående. Detta bevis är en matematisk klassiker som upptäcktes av den pythagoreiska skolan i antiken Grekland, 500-talet f.Kr.

Sats 1.4.1. *Talet $\sqrt{2}$ är irrationellt.*

Bevis. Antag motsatsen, det vill säga $\sqrt{2}$ är rationellt. I så fall kan vi skriva

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

för heltal p och q. Vi kan dessutom anta att det inte finns något heltal k som både p och q är delbara med — vore det så, skulle vi kunna förkorta bråket genom att dividera täljare och nämnare med k. Kvadrera bägge sidor: vi finner att

$$2 = \frac{p^2}{q^2},$$

det vill säga $2q^2 = p^2$. Vi observerar nu att talet p måste vara *jämnt*: om p vore udda, skulle även p^2 vara detta (produkten av två udda tal är udda), vilket det uppenbarligen inte är eftersom $p^2 = 2q^2$, ett jämnt tal. Vi kan därför skriva $p = 2p'$, så att

$$2q^2 = p^2 = (2p')^2 = 4p'^2.$$

Dividerar vi denna ekvation med 2 finner vi att

$$q^2 = 2(p')^2,$$

och med samma argument som för p kan man ur detta visa att q måste vara ett jämnt tal. Men vi antog att p och q saknade gemensamma delare, vilket motsäger att bägge talen skulle vara jämna. Denna motsägelse visar att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal. $\square$

Anmärkning 1.4.2. [En anmärkning som det är OK att ignorera] En riktigt samvetsgrann matematiker skulle kunna komma med några invändningar mot beviset ovan. I första paragrafen skriver vi till exempel att vi kan anta att p och q saknar gemensamma delare, eftersom om det existerade några sådana skulle vi kunna dividera bort dem. Men är detta uppenbart? Om vi dividerar bort en gemensam faktor kanske vi får två nya tal p' och q', som även dessa har någon gemensam nämnare. Dividerar vi bort denna får vi återigen tal p'' och q''. Hur vet vi att denna process tar slut? Intuitivt är detta uppenbart — i varje steg minskar absolutbeloppen av talen, så vi har att

$$|p| > |p'| > |p''| > \cdots > 0,$$

och det kan inte finnas några oändliga strikt avtagande följder av positiva heltal. Är detta faktum då en av de ”grundläggande räknereglerna” för naturliga talen? I princip, ja: detta påstående, eller något ekvivalent med det (såsom den så kallade *induktionsprincipen*), bör tas som ett av axiomen för de naturliga talen.

Ett annat problem är vårt påstående att produkten av två tal är udda. Med andra ord, om talet 2 varken delar a eller b, kan talet inte heller dela produkten ab. Anledningen att detta stämmer är att talet 2 är ett så kallat *primtal*. Den vanliga definitionen av ett primtal är att det är ett naturligt tal p med egenskapen att dess enda positiva delare är 1 och talet p självt, men det går att visa att denna definition är ekvivalent med egenskapen att om p varken delar a eller b, kan p inte heller dela produkten ab. Påståendet att dessa två definitioner är ekvivalenta är inte helt enkelt att visa, och utgör en stor del av beviset av den så kallade *aritmetikens fundamentalsats*: att varje naturligt tal på ett unikt sätt kan skrivas som en produkt av primtal.

En sista invändning, som kanske är seriösare än de andra två, är att formuleringen av satsen förutsätter att det existerar ett reellt tal ”$\sqrt{2}$”, det vill säga att det existerar ett reellt tal vars kvadrat är 2. Är detta uppenbart? Nja, kanske inte. I Kapitel 4 av detta kompendium kommer vi, som en konsekvens av den så kallade *satsen om mellanliggande värden*, att ge ett rigoröst bevis för påståendet att varje icke-negativt reellt tal har en kvadratrot, eller mer allmänt, att varje icke-negativt reellt tal har en n:te rot för varje heltal $n > 0$.

Tills vidare kan vi nöja oss med följande alternativa formulering av satsen, som inte förutsätter existensen av talet $\sqrt{2}$:

Sats 1.4.3. *Det finns inget rationellt tal α med egenskapen att $\alpha^2 = 2$.*

Vi (kompendieförfattarna) hoppas att föregående anmärkning inte är mer förvirrande än klargörande. Sensmoralen i kommentaren är *inte* att det är tillåtet att i ett bevis skriva att något är sant, enbart för att det känns uppenbart att det är så. Snarare är sensmoralen att för att bevisa ett påstående om något matematiskt objekt, måste detta matematiska objekt ha en rigorös definition. Eftersom vi inte har gett en riktig definition av heltalen (och att ge en sådan skulle ta upp ett helt eget kompendium) finns det grundläggande egenskaper som vi inte kan bevisa, utan måste acceptera som axiom.

Till exempel kommer vi i detta kompendium aldrig att ge en definition av vad ett reellt tal är. Som en konsekvens av detta finns det vissa egenskaper vi inte kan bevisa, utan endast acceptera som sanna: framför allt tänker vi nu på *fullständigheten hos de reella talen*, som kommer att diskuteras i Kapitel 3. *Givet att* vi accepterar dessa påståenden, är dock resultaten i kompendiet rigorös matematik.

Övningar

Övning 1.1 ($\star$)**.** Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $C = \{2, 4, 6, \ldots\}$ och $D = \{1, 4, 19, 36, 101\}$. Bestäm

(i) $B \cup C$,

(ii) $B \cap C$,

(iii) $D \cap C$,

(iv) $\{x \in D \mid x \in B\}$,

(v) $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\}$,

(vi) $\{x + 1 \mid x \in D\}$.

Övning 1.2 ($\star\star$)**.** Betrakta mängderna $A = \{1, \{\pi, \star\}, a\}$ och $B = \{a, \star\}$.

(i) Räkna upp alla element i A.

(ii) Räkna upp alla delmängder av A.

(iii) Vad är $A \cup B$ och $A \cap B$?

Övning 1.3 ($\star\star$)**.** Låt $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ och $B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots$.

Övning 1.4 ($\star\star$)**.** Låt A och B vara mängder. Vart och ett av följande påståenden är ekvivalent till exakt ett annat. Vilka hör ihop?

(i) $x \in A$,

(ii) $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$,

(iii) $A \subseteq A \cap B$,

(iv) $x \in A \implies x \notin A$,

(v) $A \cup B = A$,

(vi) $A = B$,

(vii) $A = \varnothing$,

(viii) $A \subseteq B$,

(ix) $\{x\} \subseteq A$,

(x) $x \in B \implies x \in A$.

Övning 1.5 ($\star$)**.** Ge ett exempel på en funktion från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ till mängden $\{A, B, C\}$. Hur många olika funktioner $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{A, B, C\}$ finns det?

Övning 1.6 ($\star$). (i) Beskriver $f(x) = \sqrt{x}$ en avbildning från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$?

(ii) Beskriver $f(a) = \pi$, $f(b) = \star$ och $f(0) = \sqrt{2}$ en avbildning från mängden $\{0, a, b, 1\}$ till mängden $\{\pi, \star, \sqrt{2}\}$?

(iii) Beskriver $f(a) = \pi$, $f(b) = \star$ och $f(a) = \star$ en avbildning från $\{a, b\}$ till $\{\pi, \star, \sqrt{2}\}$?

Om svaret är nej, kan du rätta till det så att det blir funktioner?

Övning 1.7 ($\star$). Avgör vilka av följande utsagor som är påståenden enligt vår definition av ett påstående. Vilka av dessa är sanna, vilka är falska, och vilka behöver vi mer information för att avgöra?

(i) Mängden av de naturliga talen.

(ii) x är ett positivt heltal.

(iii) Talet x är jämnt.

(iv) Varje mängd innehåller minst ett element.

(v) $x = 5$.

(vi) x är lösningen till ekvationen $3x + 5 = 11$.

Övning 1.8 ($\star$). Använd påståenden från föregående övning och bilda olika sammansatta påståenden på formen $P \implies Q$. Hitta minst två sådana påståenden som är sanna respektive falska.

Övning 1.9 ($\star\star\star$). Visa att $\sqrt{3}$ inte är rationellt. Varför fungerar beviset av Sats 1.4.1 inte för $\sqrt{4}$?

2 Talföljder

I detta kapitel introducerar vi begreppet talföljd, och definierar vad det betyder för en talföljd att *konvergera*. Löst talat är en talföljd helt enkelt en oändlig sekvens av reella tal, till exempel

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

och att en sådan konvergerar betyder ungefär att när man rör sig framåt i talföljden så stabiliserar sig dess värden kring ett så kallat gränsvärde. I exemplet här konvergerar talföljden, med gränsvärde 1. Att ge precisa definitioner av detta visar sig vara lite komplicerat, som läsaren säkert kommer att märka under kapitlets gång.

Innan vi kan ge rigorösa definitioner av talföljder och konvergens introducerar vi lite notation och terminologi kring *intervall* och *absolutbelopp*. Därefter ger vi definitionerna av följder och konvergens och visar några grundläggande egenskaper. Slutligen bevisar vi några räknelagar för hur man räknar med gränsvärden för talföljder. Bevisen av dessa räkneregler är inte helt lätta och är det matematiskt tyngsta innehållet i detta kapitel.

2.1 Intervall i $\mathbb{R}$

Vi kommer ofta i detta kompendium att behöva tala om olika sorters intervall på den reella linjen. Det är därför bekvämt att införa viss notation och terminologi för sådana.

Definition 2.1.1. Låt a och b vara två reella tal. Vi inför beteckningarna

(i) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,

(ii) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$,

(iii) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$,

(iv) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Ett intervall på formen (i) kallas *slutet*, och ett intervall på formen (iv) kallas *öppet*.

Låt I vara ett av intervallen (i) till (iv), och antag att $I = \varnothing$. Talet $|I| = b - a$ kallas för intervallets *längd*.

Ibland kallas intervall på formen (ii) eller (iii) för *halvöppna* intervall.

Exempel 2.1.2. Det öppna intervallet $(0, 1)$ består av alla tal på tallinjen mellan 0 och 1. I det slutna intervallet $[0, 1]$ tar vi också med ändpunkterna 0 och 1. ▲

Exempel 2.1.3. Det slutna intervallet $[0, 0]$ består av ett enda element, nämligen 0.

Det öppna intervallet $(0, 0)$ innehåller inga element överhuvudtaget, med andra ord, $(0, 0) = \varnothing$. Även mängderna $(0, 1]$ och $[0, 1)$ är tomma. ▲

Exempel 2.1.4. Om $b < a$ är alla fyra sorternas intervall likadana — alla är lika med den tomma mängden $\varnothing$. ▲

Det är också bekvämt att införa notation för oändligt långa intervall, genom att tillåta att $a = -\infty$ eller $b = \infty$. I detta fall är det brukligt att använda parentes och inte klammer för denna ändpunkt: vi vill inte ge intrycket av att det finns ett tal ∞ som ingår i intervallet. Alltså skriver man till exempel

$$[7, \infty) \qquad \text{och inte} \qquad [7, \infty].$$

2.2 Absolutbeloppet

Definition 2.2.1. Låt $x \in \mathbb{R}$. *Absolutbeloppet* $|x|$ av x är definerat som

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geqslant 0, \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Observera att $|x| \geqslant 0$ för all $x \in \mathbb{R}$, det vill säga att absolutbeloppet alltid är icke-negativt. Dessutom gäller att $|x| = 0$ om och endast om $x = 0$.

Tolkningen av talet $|x|$ är att det är *avståndet* mellan punkten x på tallinjen och punkten 0. Mer allmänt kan man tolka uttrycket

$$|x - y|$$

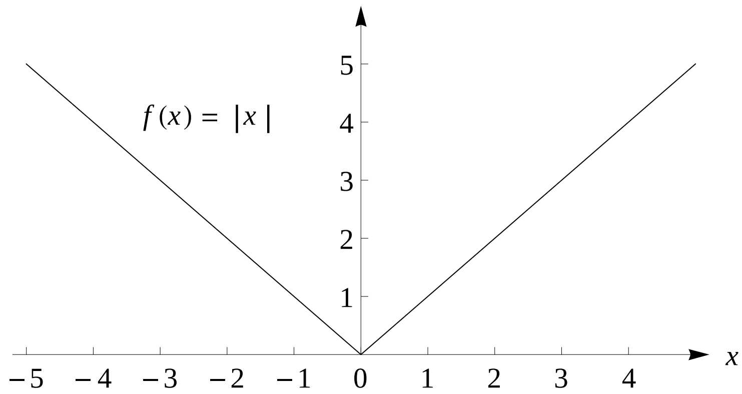
som *avståndet mellan punkterna x och y*. Detta är den viktigaste anledningen till att introducera absolutbeloppet, och denna tolkning bör sitta i ryggmärgen: när man ser $|x - y|$ ska man direkt tänka ”avståndet mellan de här två punkterna”, och inte börja fundera på vad som händer när x och y är positiva och negativa, och så vidare.

I detta kompendium är vi ofta intresserade av mängden $\{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$, det vill säga alla tal y som har avstånd mindre än r till en given punkt x. Observera att denna mängd är precis det öppna intervallet $(x - r, x + r)$. På samma sätt gäller att $\{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| \leqslant r\} = [x - r, x + r]$.

Anmärkning 2.2.2. Vi kan också tänka på absolutbeloppet som funktionen $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ som avbildar $x \mapsto |x|$. Funktionsgrafen visas i Figur 2.1.

Hjälpsats 2.2.3 (Egenskaper av absolutbeloppet)**.** *Låt $x, y \in \mathbb{R}$.*

(i) *Vi har att $x \leqslant |x|$.*



Figur 2.1: Grafen till absolutbeloppsfunktionen.

(ii) *Det gäller att* $|xy| = |x||y|$. *Speciellt är* $|x| = |-x|$.

Bevis. (i) Antag först att $x \geqslant 0$. I detta fall gäller $|x| = x$. Annars har vi $x < 0 < -x = |x|$.

(ii) Vi särskiljer tre olika fall. Om $x, y \geqslant 0$ är också $xy \geqslant 0$ och påståendet är sant. Om $x, y < 0$ gäller $xy > 0$ och $|x||y| = (-x)(-y) = xy = |xy|$. I tredje fallet är bara ett av talen negativt, säg $x < 0$ och $y \geqslant 0$. Då gäller $|x||y| = (-x)y = -(xy) = |xy|$.

Med $y = -1$ följer $|-x| = |-1||x| = |x|$.

$\square$

Anmärkning 2.2.4. Olikheter på formen $|x| \leqslant R$ förekommer ofta inom matematisk analys. Notera att detta är ekvivalent med två olikheter samtidigt:

$$|x| \leqslant R \iff -R \leqslant x \leqslant R.$$

Sats 2.2.5. *Låt* $x, y \in \mathbb{R}$. *Vi har följande två olikheter:*

Triangelolikheten:	$|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
Omvända triangelolikheten:	$|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

Bevis. (Triangelolikheten). Vi använder oss av Anmärkning 2.2.4. Enligt Sats 2.2.3 (i) har vi

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

och

$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Adderar vi dessa olikheter finner vi att

$$-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|,$$

som är, enligt Anmärkning 2.2.4, ekvivalent med att $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, alltså triangelolikheten.

(Omvända triangelolikheten). Detta är Övning 2.5. $\square$

Anmärkning 2.2.6. Om vi ersätter y med $-y$ i triangelolikheten och använder Hjälpsats 2.2.3(ii) finner vi att det också gäller att

$$|x-y| \leqslant |x|+|y| \qquad \text{och} \qquad |x|-|y| \leqslant |x+y|.$$

Ofta skrivs olikheterna på en form som kombinerar bägge dessa fall: vi har att

$$|x \pm y| \leqslant |x|+|y| \qquad \text{och} \qquad |x|-|y| \leqslant |x \pm y|.$$

Anmärkning 2.2.7. Det är ingen slump att denna olikhet kallas just för *triangel*olikheten. Namnet kommer av följande beräkning, där vi använder triangelolikheten i andra steget:

$$|x-y| = |x-z+z-y| \leqslant |x-z|+|z-y|.$$

Denna uträkning säger att avståndet från punkt x till punkt y alltid är mindre än eller lika med summan av avstånden från x till z och från z till y. Detta är motsvarigheten på reella tallinjen till följande påstående om geometri i planet: i en triangel är varje sida kortare än de resterande två sidlängderna sammanlagt.

2.3 Talföljder och deras gränsvärden

Definition 2.3.1. En *talföljd* eller *följd* av reella tal är en funktion $\underline{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Vi skriver oftast x_n för funktionsvärdet $\underline{x}(n)$, och vi skriver oftast (x_n) eller $x_1, x_2, x_3, \ldots$ istället för $\underline{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. De reella talen x_n kallas för följdens *termer*.

Exempel 2.3.2. (i) Funktionen $\underline{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\underline{x}(n) = \frac{1}{n}$ är alltså följden

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.$$

(ii) Följden $(x_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ ges av funktionen

$$\underline{x}(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \text{ är udda,} \\ 0 & \text{om } n \text{ är jämnt.} \end{cases}$$

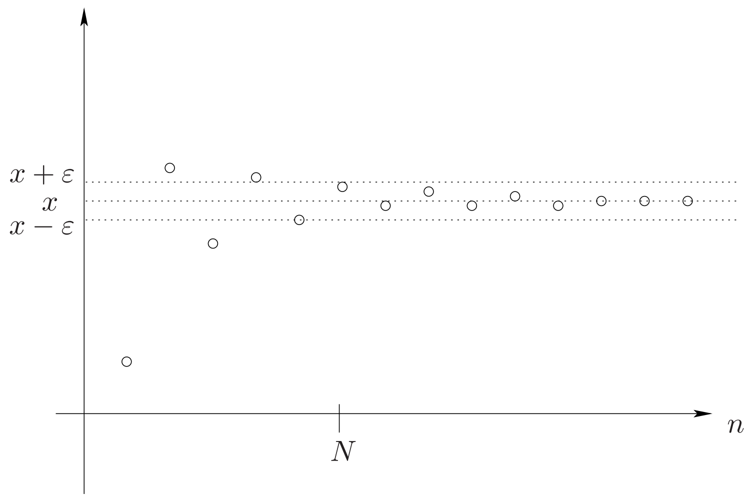
▲

En följd vars värden närmar sig ett givet värde x kallas för konvergent, vilket vi nu ska precisera.

Definition 2.3.3. En följd (x_n) är *konvergent* om det finns ett tal $x \in \mathbb{R}$ med följande egenskap: för alla $\varepsilon > 0$ finns det något heltal $N \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x| < \varepsilon$ om $n \geqslant N$. Talet x kallas i detta fall för följdens *gränsvärde* och vi skriver $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ eller $x_n \to x$ för $n \to \infty$.

Med andra ord, för alla $\varepsilon > 0$ kommer alla termer x_n (förutom några undantag i början av följden då $n < N$) att ligga i intervallet $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Anmärkning 2.3.4. Inom matematiken brukar variabler för små siffror ofta betecknas med den grekiska bokstaven ε, som utläses "epsilon".



Figur 2.2: En talföljd som konvergerar mot talet x. För varje värde på $\varepsilon > 0$, kommer alla utom ändligt många termer i följden att ligga i intervallet $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. I figuren visas ett möjligt val av talet N för det givna talet ε; varje heltal större än det N som visas i figuren skulle också fungera.

Definitionen av konvergens av en talföljd är ganska komplicerad, och består alltså av flera steg: för att bevisa att en talföljd konvergerar måste vi visa att *det existerar* ett x, sådant att *för alla* $\varepsilon > 0$, *kan vi hitta något* N, sådant att en viss olikhet gäller.

Med lite vana kan man dock lära sig att både läsa och skriva bevis som handlar om talföljder. Något som underlättar är att när vi ska bevisa att en talföljd (x_n) konvergerar mot ett tal x, gör vi i princip alltid likadant. Vi måste visa att oavsett vilket tal $\varepsilon > 0$ vi väljer, kan vi alltid hitta något N sådant att en olikhet gäller. Beviset börjar därför med meningen *"Tag $\varepsilon > 0$."* Med detta menar vi att vi har valt något tal ε, och vi vet ingenting om detta tal annat än att det är positivt. Om vi för detta ε kan konstruera något tal N, är beviset färdigt, eftersom vi i så fall kan upprepa proceduren oavsett vilket ε som valts.

Läsaren uppmanas att notera hur många av bevisen i detta kapitel som passar in i denna struktur: vi börjar med att ta ett $\varepsilon > 0$, och vi slutar med att hitta något N så att en olikhet gäller. Det enda svåra är att skriva ned vad som ska in mellan dessa start- och slutpunkter.

Exempel 2.3.5. Följden (x_n) med $x_n = \frac{1}{n}$ konvergerar mot 0. Notera först att

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|.$$

Nu har nämligen de reella talen den egenskapen att det för varje $\varepsilon > 0$ finns något positivt heltal N så att $\left|\frac{1}{N}\right| = \frac{1}{N} < \varepsilon$, och detta innebär alltså att gränsvärdet är 0. Vill man imponera på sina vänner hänvisar man till detta som den *arkimediska egenskapen* hos de reella talen. ▲

Exempel 2.3.6. Följden $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ från Exempel 2.3.2(ii) konvergerar inte. Ty låt $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Om följden skulle konvergera skulle det finnas ett heltal N och ett tal x sådant att $|x_n - x| < \varepsilon$ om $n \geqslant N$. Väljer vi n till ett udda tal ser vi därmed att

$$|1 - x| < \varepsilon = \frac{1}{2},$$

och om n väljs till ett jämnt tal ser vi att

$$|0 - x| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Alltså ligger x både i intervallet $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ och i intervallet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Men dessa två intervall är disjunkta, vilket är en motsägelse. ▲

Argumentet i föregeånde exempel leder till följande hjälpsats.

Hjälpsats 2.3.7. *Om en följd (x_n) konvergerar mot x och mot y, så gäller $x = y$. Med andra ord, en konvergent följd har ett unikt gränsvärde.*

Bevis. Tag $\varepsilon > 0$ och sätt $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$. Eftersom följden konvergerar mot x finns det $N_1 \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x| < \hat{\varepsilon}$ för alla $n \geqslant N_1$. På samma sätt finns det $N_2 \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - y| < \hat{\varepsilon}$ för alla $n \geqslant N_2$. Triangelolikheten ger

$$|x - y| = |(x_n - y) - (x_n - x)| \leqslant |x_n - y| + |x_n - x| < \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

för alla $n \geqslant \max(N_1, N_2)$. I och med detta gäller för alla $\varepsilon > 0$ ser vi att $|x - y| = 0$, det vill säga $x = y$. □

Definition 2.3.8. En följd (x_n) kallas för *begränsad* om det finns något $M \in \mathbb{R}$ så att $|x_n| \leqslant M$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Hjälpsats 2.3.9. *En konvergent följd (x_n) är begränsad.*

Bevis. Låt x vara följdens gränsvärde och tag $\varepsilon > 0$. Det finns $N \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x| \leqslant \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$. Speciellt betyder det att $|x_n| \leqslant |x| + \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$. Det följer att $M = \max(|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x| + \varepsilon)$ begränsar följden (x_n). □

Observera att en begränsad följd behöver inte konvergera. Följden från Exempel 2.3.2(ii) är begränsad och oscillerar mellan värdena -1 och 1.

En mycket användbar sats är följande.

Sats 2.3.10. *Låt (x_n) vara en konvergent talföljd. Antag att det existerar något N sådant att olikheten $x_n \leqslant A$ gäller för varje $n \geqslant N$. I så fall är också*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant A.$$

Motsvarande påstående gäller med $\leqslant$ utbytt mot $\geqslant$.

Bevis. Antag motsatsen, att $\lim_{n\to\infty} x_n = x > A$. Låt $\varepsilon = x - A$. Vi vet nu att alla utom ändligt många termer av följden ligger i intervallet $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Men alla tal i detta interval är strikt större än $A = x-\varepsilon$, vilket är en motsägelse. □

2.4 Räknelagar för gränsvärden

Sats 2.4.1. *Antag att (x_n) och (y_n) är talföljder som konvergerar mot x respektive y. Låt a och b vara två reella tal. Följande gäller:*

Linjäritet: $\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = ax + by.$
Produkt: $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = xy.$
Kvot: *Om $y \neq 0$ är $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.*

Speciellt är alla dessa talföljder konvergenta.

Bevis. (Linjäritet.) Tag $\varepsilon > 0$. Vi antar att $a, b \neq 0$, och lämnar det (enklare) fallet att någon av dem är noll till läsaren. Välj tal N_1 och N_2 sådana att

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|a|}, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

om $n \geqslant N_1$ respektive $n \geqslant N_2$. Sätter vi nu $N = \max(N_1, N_2)$ gäller bägge dessa olikheter om $n \geqslant N$, vilket ger att

$$\begin{aligned}
|ax_n + by_n - ax - by| &\leqslant |ax_n - ax| + |by_n - by| && \text{(triangelolikheten)}\\
&= |a||x_n - x| + |b||y_n - y| && \text{(Hjälpsats 2.2.3)}\\
&< |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} && \text{(om } n > N\text{)}\\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

(Produkt.) Tag $\varepsilon > 0$. Först gör vi ett litet trick: vi skriver om $x_n y_n - xy = x_n y_n - x_n y + x_n y - xy$. Enligt triangelolikheten gäller

$$|x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leqslant |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| = |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|.$$

Eftersom (x_n) är konvergent är den begränsad (Sats 2.3.9), så tag ett tal $M > 0$ sådant att $|x_n| \leqslant M$ för alla n. Välj sedan ett tal N_1 sådant att

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

för alla $n \geqslant N_1$. Om $y \neq 0$, tag sedan ett tal N_2 sådant att

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}.$$

I så fall är

$$|x_n y_n - xy| \leqslant |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|y|} \cdot |y| = \varepsilon$$

för alla $n \geqslant N = \max(N_1, N_2)$. Om $y = 0$ kan vi strunta i N_2: vi har

$$|x_n y_n - xy| \leqslant |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + 0 < \varepsilon$$

för alla $n \geqslant N_1$.

(Kvot.) Tag $\varepsilon > 0$. Genom att göra omskrivningen $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$, räcker det att bevisa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y};$$

beviset följer sedan av produktregeln vi precis visade. Nu är

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y - y_n}{y \cdot y_n}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y||y_n|}.$$

Eftersom (y_n) konvergerar mot y, och $\frac{|y|}{2} > 0$, finns ett tal N_1 sådant att

$$|y - y_n| < \frac{|y|}{2}$$

om $n \geqslant N_1$. Men $|y| - |y_n| \leqslant |y - y_n|$ enligt omvända triangelolikheten (Sats 2.2.5), så

$$|y| - |y_n| < \frac{|y|}{2}$$

vilket ger $|y_n| > \frac{|y|}{2}$. Å andra sidan är även talet $\frac{y^2\varepsilon}{2}$ positivt, så det finns ett N_2 för vilket

$$|y_n - y| < \frac{|y|^2\varepsilon}{2}.$$

Om $n \geqslant N = \max(N_1, N_2)$ gäller därmed att

$$\frac{|y - y_n|}{|y_n||y|} < \frac{|y|^2\varepsilon/2}{|y| \cdot |y|/2} = \varepsilon.$$

□

Exempel 2.4.2. För att se hur praktiska de här räknelagarna är ska vi räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2 - 4n + 3}.$$

Eftersom de individuella följderna $(3n^2 - 1)$ och $(n^2 - 4n + 3)$ inte konvergerar (de är ej begränsade) kan vi inte direkt använda oss av kvotregeln. Istället förkortar vi bråket med n^2 till

$$\frac{3n^2 - 1}{n^2 - 4n + 3} = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}.$$

Nu existerar gränsvärdena till både täljaren och nämnaren: i och med

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

följer ur produktregeln att också

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Nu följer med gränsvärdenas linjäritet att $\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{1}{n^2}) = 3 - 0 = 3$ och $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}) = 1 - 0 + 0 = 1$. Slutligen leder kvotregeln till

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2 - 4n + 3} = \frac{3}{1} = 3. \qquad \blacktriangle$$

Övningar

Övning 2.1 ($\star$). Beskriv följande mängder. Vilka av de förekommande intervallen är öppna och vilka är slutna? (*Ledning:* Markera gärna mängderna på tallinjen.)

(i) $[-1, 2] \cup (1, 5]$,

(ii) $[-1, 2] \cap (1, 5]$,

(iii) $[3, 10] \setminus (5, 7)$,

(iv) $((3, 10] \setminus [5, 7)) \cup [5, 6)$,

(v) $([4, 6] \setminus (4, 6)) \cap (-2, 5]$.

Övning 2.2 ($\star - \star\star$). För vilka tal $x \in \mathbb{R}$ gäller

(i) $|x - 5| = 2$,

(ii) $|x - 5| = -2$,

(iii) $||x - 5| - 3| = 2$.

Övning 2.3 ($\star\star$). Vilka tal $x \in \mathbb{R}$ uppfyller $|x - 1| - |x + 1| = 1$?

Övning 2.4 ($\star$). Vilka tal $x \in \mathbb{R}$ uppfyller $|x - 3| < 5$? Markera dem på tallinjen.

Övning 2.5 ($\star\star$). Visa omvända triangelolikheten $|x| - |y| \leqslant |x - y|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. (*Ledning*: Du kan använda faktumet att $x = x - y + y$ och triangelolikheten.)

Övning 2.6 ($\star\star$). Beräkna följande gränsvärden.

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 11n^2 + 4}{14n^3 + 3n^2 - 5n - 7}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 12}{n + 2}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 + 5n + 13}{3n^4 - n^2 + 7n - 2}$.

Vad är skillnaden mellan (i), (ii) och (iii)?

Övning 2.7 ($\star\star\star$)**.** Använd att $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ och $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ (där $e = 2.71828\ldots$ är *Eulertalet*) för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}}.$$

Övning 2.8 ($\star\star$)**.** Låt (x_n) vara en talföljd som konvergerar mot x, och antag att följden (y_n) uppfyller $x_n = y_n$ för alla utom ändligt många värden på n. Visa att även y_n konvergerar mot x.

Övning 2.9 ($\star$)**.** Är Sats 2.3.10 sann om man ersätter $\geqslant$ med $>$?

Övning 2.10 ($\star\star\star$)**.** (i) Ge ett exempel på oändligt många öppna intervall $I_1, I_2, I_3, \ldots$ så att deras snitt $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \ldots$ är ett slutet intervall.

(ii) Ge ett exempel på oändligt många slutna intervall $I_1, I_2, I_3, \ldots$ så att deras union $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$ är ett öppet intervall.

Övning 2.11 ($\star\star$)**.** Låt (x_n), (y_n) och (z_n) vara talföljder, och antag att olikheterna

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

gäller för varje n. Antag att $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$. Visa att även (y_n) konvergerar, och att y_n konvergerar mot a.

3 Fullständighet hos de reella talen

Den reella tallinjen har en viktig egenskap som kallas för *fullständighet*. Detta beskriver (vagt formulerat) att det inte finns ”luckor” mellan de reella talen, att den reella tallinjen faktiskt är en sammanhängande linje utan några hål. Definitionen av fullständighet kan vara lite svårsmält vid en första anblick. I detta kapitel kommer vi därför först att ge ett motiverande exempel på något som inte är fullständigt, nämligen de rationella talen. Efter detta ger vi tre olika sätt att formulera fullständigheten av de reella talen: genom så kallade *monotona talföljder*, *nästlade intervall* eller *supremum*. Vi visar att dessa tre sätt att formulera fullständigheten av de reella talen är ekvivalenta.

3.1 De rationella talen är inte fullständiga

Ett sätt att tänka på fullständighet är att denna egenskap uttrycker skillnaden mellan till exempel de rationella talen, $\mathbb{Q}$, och de reella talen, $\mathbb{R}$. Vid första anblick kan ett sådant påstående verka märkligt — det är väl klart att det är skillnad på de rationella talen och de reella? Vi vet ju att det finns flera reella tal som inte är rationella — i denna kurs har vi redan diskuterat $\sqrt{2}$, och flera av läsarna kanske känner till att exempelvis talen π och e inte är rationella, så uppenbarligen är $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

Det vi menar är att de rationella talen delar ändå många grundläggande egenskaper med de reella talen. De rationella talen kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras; de kan sorteras enligt $\leqslant$, och alla dessa saker uppfyller samma räknelagar både för rationella och reella tal. Samtidigt vet vi också att det finns stora skillnader mellan de rationella och de reella talen. Ett exempel ges av följande sats (som vi kommer att se bevisad i nästa kapitel):

Sats 3.1.1. *Låt n vara ett positivt heltal. Varje reellt tal $a \geqslant 0$ har en unik reell n:te root, det vill säga ett tal $y \geqslant 0$ så att $y^n = a$. Detta tal betäcknas med $\sqrt[n]{a}$.*

Ovanstående sats är *falsk* om vi ersätter ordet reell med ordet rationell, eftersom Sats 1.4.1 visar att det rationella talet $a = 2$ inte har en rationell kvadratrot. Diskussionen i föregående paragraf visar alltså att om vi ska kunna bevisa ett påstående som Sats 3.1.1, kan vi omöjligt använda oss enbart av räkning och de vanliga räknelagarna: vi måste dessutom använda någon slags egenskap som är sann för de reella talen men inte de rationella talen (ty annars skulle beviset fungera även om ordet ”reell” i satsen ersattes med ”rationell”).

Denna extra egenskap som krävs är precis fullständigheten av de reella talen. De rationella talen är nämligen, till skillnad från de reella, *inte* fullständiga. Om de reella talen är en obruten och heltäckande linje, så läcker de rationella talen som ett såll. Även om varje litet intervall på den reella linjen innehåller oändligt många rationella tal (Övning 3.9), så innehåller också varje intervall oändligt många irrationella tal (Övning 3.10), som är som små ”luckor” i den rationella tallinjen.

3.2 Formuleringar av fullständigheten hos de reella talen

Det finns flera sätt att formulera fullständigheten hos de reella talen. Alla kräver en del inledande definitioner.

Definition 3.2.1. En talföljd (x_n) kallas *monoton* om det antingen gäller att $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$, eller att $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$.

Det första sättet att formulera fullständigheten av de reella talen är följande.

Varje monoton och begränsad talföljd konvergerar.

Denna egenskap känns förhoppningsvis naturlig. Den uttrycker att om en följd av tal är, säg, växande, så finns endast två möjligheter: antingen växer sig termerna av följden obegränsat stora, eller så närmar de sig ett gränsvärde.

Ett andra sätt att formulera fullständighetsegenskapen är med hjälp av så kallade *nästlade intervall*.

Definition 3.2.2. En *följd av nästlade intervall* är en sekvens av oändligt många icke-tomma slutna intervall $I_n = [a_n, b_n]$ sådant att $I_{n+1} \subseteq I_n$, det vill säga $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

Man kan nu formulera fullständigheten av de reella talen på följande sätt:

För varje följd av nästlade intervall finns det minst ett reellt tal x som ligger i varje intervall.

Även denna egenskap känns förhoppningsvis ganska naturlig. Antag att något intervall $[a_n, b_n]$ har längd noll, det vill säga, att $a_n = b_n$. I så fall måste $[a_m, b_m] = [a_n, b_n]$ för alla $m \geqslant n$, och talet $a_n = b_n$ kan väljas som x. Om alla intervall har positiv längd borde detta enbart göra det *lättare* att hitta ett tal x. (Argumentet i denna paragraf bör dock tas med en nypa salt — se Övning 3.4.)

Ett tredje sätt att beskriva fullständigheten är genom övre och lägre gränser.

Definition 3.2.3. Låt $X \subseteq \mathbb{R}$ vara en delmängd av $\mathbb{R}$. Talet $y \in \mathbb{R}$ är en *övre gräns* till X om $y \geqslant x$ för alla $x \in X$. På samma sätt är y en *lägre gräns* till X om $y \leqslant x$ för alla $x \in X$. En mängd som har en övre gräns kallas *uppåt begränsad*; en mängd som har en lägre gräns kallas *nedåt begränsad*; en mängd som är både uppåt och nedåt begränsad kallas helt enkelt *begränsad*.

Definition 3.2.4. Låt $X \subseteq \mathbb{R}$ vara en delmängd av $\mathbb{R}$. Ett *supremum* för X är ett tal $y \in \mathbb{R}$ så att

(i) y är en övre gräns till X och

(ii) y är den minsta övre gränsen till X, det vill säga, för alla övre gränser z av X gäller att $y \leqslant z$.

På samma sätt kallas en största lägre gräns för *infimum.*

Ett sista sätt att formulera fullständigheten av de reella talen är följande:

Varje icke-tom begränsad delmängd av $\mathbb{R}$ har ett supremum och ett infimum.

Exempel 3.2.5. Talet 2 är en övre gräns till intervallet $(0, 1)$ och 1 är ett supremum. ▲

Exempel 3.2.6. Mängden $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ har alla icke-positiva tal som lägre gränser och 0 som infimum. ▲

Exempel 3.2.7. Om mängden X har ett största element (ett *maximum*), det vill säga ett element $x \in X$ sådant att $y \leqslant x$ för alla $x \in X$, så är detta ett supremum. Tydligen är nämligen x en övre gräns. Om z är någon annan övre gräns till X, måste speciellt $x \leqslant z$ eftersom $x \in X$. Alltså är x också en minsta övre gräns. Det är dock inte sant att varje mängd har ett maximum: mängden $(0, 1)$ har till exempel inget största element, så supremum för denna mängd (talet 1) är ett element som ligger utanför mängden självt. ▲

Anmärkning 3.2.8. Definitionen av supremum och infimum är något abstrakt. Senare i detta kapitel kommer vi att se en alternativ definition som eventuellt är mer intuitiv, se Sats 3.2.13.

Definition 3.2.9. Om mängden X har ett supremum, respektive ett infimum, betecknar vi detta tal med $\sup X$, respektive $\inf X$. Enligt Övning 3.5 är detta tal unikt, så vår notation är otvetydig.

Definition 3.2.10. Låt $X \subseteq \mathbb{R}$ vara en delmängd. Vi säger att $x \in \mathbb{R}$ är en *randpunkt* till X om varje intervall på formen $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, där $\varepsilon > 0$, innehåller minst en punkt ur X och minst en punkt ur $\mathbb{R} \setminus X$. Vi betecknar mängden av randpunkter till X med ∂X.

Exempel 3.2.11. För varje intervall $I = [a, b]$ eller $I = (a, b)$ är a och b randpunkterna, det vill säga, $\partial I = \{a, b\}$. ▲

Sats 3.2.12. *Antag att mängden X har ett supremum (respektive infimum). I så fall måste* $\sup X$ *(respektive* $\inf X$*) ligga i ∂X.*

Bevis. Vi behandlar endast påståendet rörande supremum, infimum visas likadant. Antag motsatsen, det vill säga $x = \sup X \notin \partial X$. I så fall existerar ett intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ som antingen är en delmängd av X, eller som är disjunkt från X. I det första fallet är exempelvis $x + \varepsilon/2$ — som ju ligger i intervallet $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ — ett element av X, vilket motsäger att x skulle vara ett supremum. I det andra fallet ser vi att till exempel $x - \varepsilon/2$ är större än varje element av X, vilket även detta säger emot att x skulle vara ett supremum. □

Sats 3.2.13. *Låt X vara en icke-tom uppåt begränsad delmängd av $\mathbb{R}$. Då gäller att $\sup X$ är det största talet som kan skrivas som $\lim_{n\to\infty} x_n$ för en talföljd (x_n) av element av X. (Speciellt existerar ett största sådant tal, något som inte är uppenbart.) Motsvarande gäller för infimum.*

Bevis. Låt först (x_n) vara en konvergent följd av tal ur X. Eftersom vi har $x_n \leqslant \sup X$ för varje n, ger Sats 2.3.10 att även gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} x_n$ är mindre än $\sup X$ för varje sådan talföljd. För att avsluta beviset krävs endast att det existerar en talföljd som konvergerar mot $\sup X$.

Vi vet enligt Sats 3.2.12 att $\sup X$ är en randpunkt till X, så för varje n finns ett element av X i intervallet $(\sup X - \frac{1}{n}, \sup X + \frac{1}{n})$. Låt x_n vara ett av dessa element. För varje $\varepsilon > 0$ finns ett N med $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$; om $n \geqslant N$ måste i så fall $|x_n - \sup X| < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$, vilket visar att följden (x_n) konvergerar mot $\sup X$. □

Låt oss nu i en serie exempel se konkret varför de rationella talen $\mathbb{Q}$ inte är fullständiga. Vi visar med tre sinsemellan ganska likartade exempel att inget av de tre påståenden vi givit gäller för de rationella talen. I våra exempel nedan använder vi oss av det irrationella talet

$$\pi = 3.14159265...,$$

men exemplen hade fungerat likadant med ett godtyckligt irrationellt tal.

Exempel 3.2.14. Betrakta talföljden

$$x_1 = 3,\ x_2 = 3.1,\ x_3 = 3.14,\ x_4 = 3.141, \ldots.$$

Med andra ord, i varje steg lägger vi till ytterligare en decimal av π. Denna talföljd är monotont växande och uppåt begränsad (till exempel blir inget av talen större än 4). Vart och ett av talen x_n är rationellt (till exempel är $x_4 = 3.141 = \frac{3141}{1000}$), men dess gränsvärde – som är talet π – är irrationellt. ▲

Exempel 3.2.15. Betrakta denna följd av nästlade intervall:

$$I_1 = [3, 4],\ I_2 = [3.1, 3.2],\ I_3 = [3.14, 3.15],\ I_4 = [3.141, 3.142], \ldots$$

Med andra ord, I_n har som lägre gräns talet π avrundat nedåt efter den n:te decimalen, och som övre gräns talet π avrundat uppåt efter den n:te decimalen. Ett tal x ligger därmed i intervallet I_n om de första n decimalerna till x är desamma som de första n decimalerna till π. Om ett tal x ligger i varje intervall I_n måste därför *alla* decimaler till x vara desamma som decimalerna till π, så det finns ett unikt reellt tal x som ligger i varje intervall, nämligen $x = \pi$. Dock finns inget rationellt tal som ligger i varje intervall, trots att intervallgränserna är rationella tal för varje n, och att varje intervall innehåller oändligt många rationella tal. ▲

Exempel 3.2.16. Betrakta mängden

$$X = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant q < \pi\}.$$

Tydligen är X begränsad, och alla element av X är rationella tal. Dock är inte dess supremum $\sup X$ ett rationellt tal: om så vore fallet, och vi låter $r = \sup X$, så skulle antingen $r < \pi$ eller $r > \pi$ gälla. (Annars skulle $r = \pi$, vilket är omöjligt eftersom r antogs rationellt.) I det föregående fallet kan inte r vara en övre gräns för X, eftersom intervallet (r, π) innehåller minst ett rationellt tal enligt Övning 3.9 (som alltså ligger i X men är större än r). I det andra fallet kan r inte vara en minsta övre gräns, eftersom intervallet (π, r) innehåller minst ett rationellt tal (som alltså är en mindre övre gräns för X). ▲

3.3 Ekvivalens av de tre formuleringarna

Låt oss nu bevisa det vi påstått flera gånger redan i detta kapitel: att alla tre formuleringarna vi givit för fullständigheten av de reella talen faktiskt är ekvivalenta med varandra.

Sats 3.3.1. *Följande tre påståenden är ekvivalenta.*

(i) *Varje monoton och begränsad talföljd konvergerar.*

(ii) *För varje följd av nästlade intervall i $\mathbb{R}$ existerar minst ett tal x som ligger i samtliga intervall.*

(iii) *Varje icke-tom begränsad delmängd av $\mathbb{R}$ har ett supremum och ett infimum.*

Bevis. (i) $\implies$ (ii): Antag att $I_n = [a_n, b_n]$ är en följd av nästlade intervall. Vi har alltså de oändligt många olikheterna

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$

Men detta innebär att (a_n) och (b_n) båda är monotona talföljder. Dessutom är de begränsade, eftersom alla termer ligger i intervallet $[a_1, b_1]$. Alltså existerar $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ och $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Vi hävdar nu att $a \leqslant b$. Ty för alla n och m gäller att

$$a_n \leqslant b_m.$$

För $n \to \infty$ får vi enligt Sats 2.3.10 att $\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant b_m$. Låter vi sedan $m \to \infty$ ger ytterligare en tillämpning av Sats 2.3.10 att $a \leqslant \lim_{m\to\infty} b_m = b$. Men nu gäller

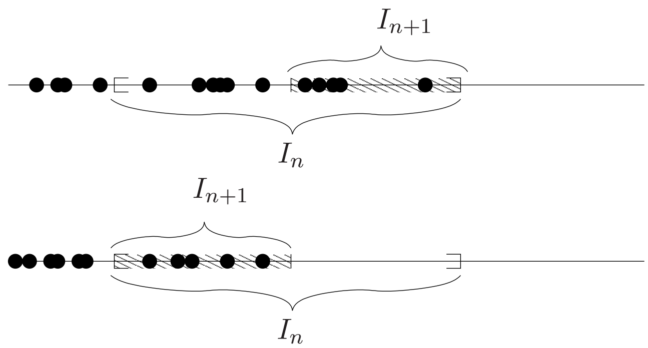
$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$$

för alla n, vilket innebär att varje tal i det icke-tomma intervallet $[a, b]$ kan väljas som x.

(ii) $\implies$ (iii): Låt X vara en icke-tom uppåt begränsad delmängd. Låt a_1 vara ett godtyckligt element av X, och låt b_1 vara någon övre gräns för X. Vi konstruerar nu en följd av nästlade intervall. Vi börjar med intervallet $I_1 = [a_1, b_1]$. För att få intervallet I_{n+1} från intervallet $I_n = [a_n, b_n]$ börjar vi med att dela intervallet i två hälfter. Notera att punkten $\frac{a_n+b_n}{2}$ är precis mittpunkten på intervallet. Vi delar in i två fall:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] & \text{om } \frac{a_n+b_n}{2} \text{ är en övre gräns för } X \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] & \text{annars.} \end{cases}$$

Denna definition är vald för att följande två egenskaper skall gälla: för alla n är b_n en övre gräns för X, och varje intervall I_n innehåller minst ett element av X. Regeln illustreras i Figur 3.1. Vi noterar att $I_n \supset I_{n+1}$, så att vi har en följd av nästlade intervall, och att intervallängderna $|I_n|$ blir obegränsat små.



Figur 3.1: De två olika fallen i konstruktionen av följden (I_n). Om mängden X (vars element representeras av svarta prickar) innehåller ett element från intervallets andra hälft, låter vi denna andra hälft vara nästa intervall i följden. Om alla element ligger i första hälften, blir denna i stället nästa intervall.

Enligt antagandet finns det ett tal x som ligger i samtliga intervall I_n. Vi påstår att x är ett supremum till X. Antag först att det finns ett tal $y \in X$ med $y > x$. Eftersom längden av intervallen I_n blir obegränsat liten finns det ett heltal n så att $|I_n| < y - x$. Detta medför att $y > b_n$, vilket är omöjligt eftersom b_n är en övre gräns för X. För att visa att x är en minsta övre gräns antar vi att z är en övre gräns för X som är mindre än x. Då finns det ett heltal n så att längden av intervallet $I_n = [a_n, b_n]$ är mindre än $x - z$. Men då är varje element av I_n större än z, vilket säger emot att det finns ett element av X i I_n.

(iii) $\implies$ (i): Låt (x_n) vara en monoton och begränsad talföljd. Vi kan utan inskränkning anta att x_n är växande; det andra fallet hanteras likadant. Inför mängden

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

och låt $x = \sup X$. Vi hävdar nu att $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ty tag $\varepsilon > 0$. Eftersom x är en randpunkt till X enligt Sats 3.2.12, existerar det ett element x_N av X i intervallet $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Men x är större än alla element i X, så vi har

$x - \varepsilon < x_N \leqslant x$. Men eftersom följden är monoton gäller nu också att

$$x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant x$$

för alla $n \geqslant N$, så $|x_n - x| < \varepsilon$ om $n \geqslant N$, vilket visar påståendet. $\square$

Övningar

Övning 3.1 ($\star$)**.** Är följande talföljder monotona?

(i) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(ii) $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

(iii) $x_n = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{6}\right)$.

(iv) $x_n = n^2 - 1000$.

Övning 3.2 ($\star$)**.** Vilka av följande mängder har ett supremum eller ett infimum? För de som har ett supremum/infimum, bestäm värdet på detta. (Endast svar räcker.)

(i) $X = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

(ii) $X = \{\exp(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(iii) Mängden av alla heltal delbara med 9.

(iv) ($\star\star$) den tomma mängden $X = \varnothing$?

Övning 3.3 ($\star\star$)**.** Visa att följande tre påståenden är ekvivalenta:

(i) Varje monoton och begränsad följd konvergerar.

(ii) Varje monotont växande och uppåt begränsad följd konvergerar.

(iii) Varje monotont avtagande och nedåt begränsad följd konvergerar.

Vi kunde alltså ha använt antingen (ii) eller (iii) också som formuleringar av de reella talens fullständighet.

Anmärkning: På samma sätt är det ekvivalent att varje begränsad icke-tom delmängd har både ett supremum och ett infimum, att varje uppåt begränsad icke-tom delmängd har ett supremum, och att varje nedåt begränsad icke-tom delmängd har ett infimum.

Övning 3.4 ($\star\star$)**.** Vi vet att om $I_n = [a_n, b_n]$ är en följd av nästlade intervall, finns det ett tal som ligger i varje intervall I_n. Visa att detta påstående är falskt om:

(i) vi i stället använder öppna intervall, det vill säga nästlade intervall på formen (a_n, b_n);

(ii) vi i stället tillåter oändligt långa intervall, det vill säga intervall på formen $[a_n, \infty)$ eller $(-\infty, b_n]$.

(*Ledning:* Observera att det räcker att ange var sitt motexempel.)

Övning 3.5 ($\star\star$)**.** Visa att varje delmängd av $\mathbb{R}$ har högst ett supremum och högst ett infimum.

Övning 3.6 ($\star\star$)**.** Låt $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Visa att $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ och $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$, förutsatt att supremum av alla dessa mängder existerar. Ge ett exempel där olikheten för snitt är strikt.

Övning 3.7 ($\star\star$)**.** Låt a_1 vara ett godtyckligt reellt tal, och definiera en talföljd genom

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Visa att om $a_1 \leqslant 3$, så är (a_n) monotont växande och uppåt begränsad av 3, medan om $a_1 \geqslant 3$, så är (a_n) monotont avtagande och nedåt begränsad av 3. (*Anmärkning:* Om x och y är två godtyckliga tal, så är $\frac{x+y}{2}$ talet som ligger precis mitt emellan x och y på tallinjen. Vad ger detta för geometrisk tolkning av följden (a_n)?)

Övning 3.8 ($\star\star$)**.** Visa att följden (a_n) i föregående övning konvergerar mot 3. (*Ledning:* Låt $n \to \infty$ i ekvationen $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2}$, och använd att vi vet enligt föregående övning att $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, för något a.)

Övning 3.9 ($\star\star\star$)**.** Visa att varje icke-tomt öppet intervall på den reella linjen innehåller minst ett rationellt tal. För bonuspoäng, visa att varje öppet intervall innehåller oändligt många rationella tal.

Övning 3.10 ($\star\star\star$)**.** Visa att varje icke-tomt öppet intervall innehåller ett irrationellt tal. (Lättast är att använda sig av resultatet från föregående uppgift.)

Övning 3.11 ($\star\star\star$)**.** För $n \in \mathbb{N}$ låt

$$a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}.$$

(i) Beräkna a_1, a_2 och a_3.

(ii) Beräkna $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(iii) Nu definerar vi en ny följd genom $x_n := \frac{a_n}{\sqrt{n}}$. Visa att $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 < 1$. Dra slutsatsen att följden (x_n) är monotont avtagande.

(iv) Dessutom sätter vi $y_n := \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Visa att $\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^2 > 1$ och att detta innebär att följden (y_n) är monotont växande.

(v) Konvergerar följderna (x_n) och (y_n)? (*Ledning:* Det kan vara bra att jämföra talen x_n och y_n.)

4 Kontinuitet

I detta kapitel inför vi begreppen *kontinuerlig funktion*, och *gränsvärdet av en funktion*. Båda dessa kan ses som generaliseringar av talföljdsbegreppet som introducerades i Kapitel 2. Att en funktion är kontinuerlig betyder ungefär att en tillräckligt liten förändring i funktionens indata inte kan ge en alltför stor förändring i funktionens utdata. Gränsvärdet av en funktion i en punkt x_0 är ett mått på hur funktionen beter sig för indata som ligger nära x_0, men gränsvärdet beror inte på funktionsvärdet i själva punkten x_0. Funktionen behöver inte ens vara definierad i punkten x_0, så gränsvärdet kan användas för att studera en funktion i ett intervall kring en punkt där funktionen ej är väldefinierad.

I kapitlet ger vi först definitionen av kontinuitet, och visar att kontinuitet av en funktion kan uttryckas helt och hållet med hjälp av talföljder. När vi visat detta kan vi använda egenskaper för talföljder från Kapitel 2 för att bevisa liknande egenskaper för kontinuerliga funktioner. Efter detta inför vi gränsvärdesbegreppet, och visar att detta kan uttryckas både i termer av kontinuitet och i termer av talföljder.

Vi avslutar kapitlet med att visa en viktig sats om kontinuerliga funktioner, den så kallade satsen om *mellanliggande värden*. Här behöver vi för första gången i kompendiet använda att de reella talen är fullständiga. Som ett exempel på kraftfullheten i denna sats ger vi ett bevis att varje positivt reellt tal har en n:te rot.

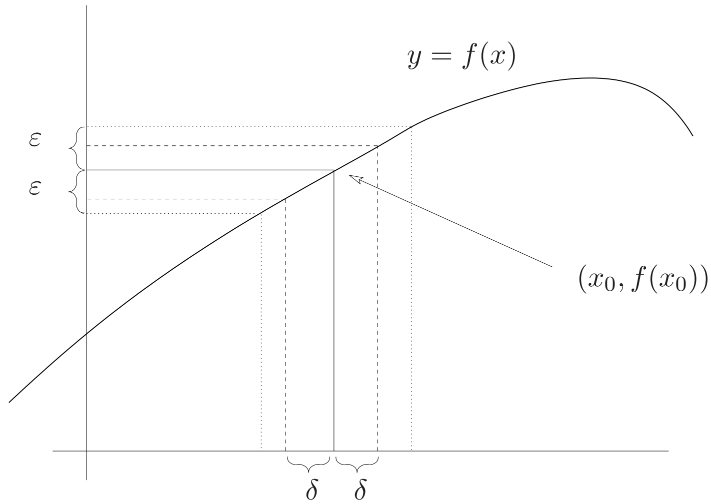
I hela kapitlet låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$, till exempel ett intervall $[a, b]$ med reella tal $a, b \in \mathbb{R}$.

4.1 Definition och exempel

I vardagslivet betyder ordet ”kontinuerligt” ungefär ”oavbrutet” eller ”sammanhängande”. Detta är också idéen bakom begreppet kontinuitet inom matematiken. Ett naivt sätt att säga att en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig är att dess graf kan ritas utan att lyfta pennan. Denna beskrivning duger som intuitiv bild men inte som matematisk definition. Att funktionen ”gör ett hopp” i punkten x betyder att i varje litet intervall kring punkten x kan vi hitta ett värde y sådant att funktionsvärdena $f(x)$ och $f(y)$ skiljer sig ”ganska mycket”. Med andra ord, för en kontinuerlig funktion gäller att om vi är tillräckligt nära punkten x kommer funktionsvärdena inte skilja sig mycket från värdet $f(x)$. Vi formalisera detta på följande sätt:

Definition 4.1.1 (ε-δ-definitionen)**.** Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$. En funktion $f : X \to \mathbb{R}$ är *kontinuerlig i punkten* $x_0 \in X$ om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar något $\delta > 0$ så att $|x - x_0| < \delta$ och $x \in X$ medför $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Funktionen f är *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i samtliga punkter $x_0 \in X$.

Definitionen illustreras i Figur 4.1.



Figur 4.1: För varje val av ε existerar det ett val av δ sådant att $f(x)$ ligger i intervallet $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ om x ligger i intervallet $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

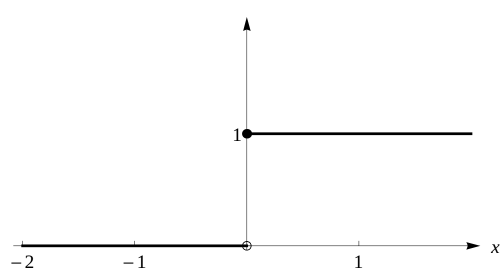
För att bättre förstå den här mycket abstrakta definitionen ska vi titta på flera exempel och icke-exempel.

Exempel 4.1.2. Identitetsavbildningen $\mathrm{id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ är kontinuerlig. Vi kan nämligen välja $\delta = \varepsilon$ i definitionen. ▲

Exempel 4.1.3. Trappstegsfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \\ 1 & \text{för } x \geqslant 0 \end{cases}$$

är inte kontinuerlig i punkten $x_0 = 0$.

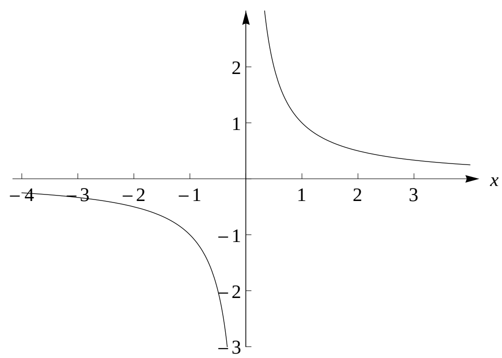


Figur 4.2: Grafen till funktionen $f(x) = 1$ för $x \geqslant 0$ och $f(x) = 0$ för $x < 0$.

Observera att det räcker att hitta ett $\varepsilon > 0$ som inte har något $\delta > 0$ med de önskade egenskaperna. Vi kan till exempel ta $\varepsilon = \frac{1}{2}$. För alla $\delta > 0$ uppfyller nämligen punkten $x = -\frac{1}{2}\delta$ att $|x - x_0| = |-\frac{\delta}{2} - 0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ men $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$. ▲

Exempel 4.1.4. Antag att X består av en enda punkt x_0. Då är varje funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ kontinuerlig: för varje $\varepsilon > 0$ kan vi nämligen låta δ vara vilket tal som helst! Ty om $|x - x_0| < \delta$ och $x \in X$ måste vi ha $x = x_0$ oavsett δ, och i så fall är $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. ▲

Exempel 4.1.5. Funktionen $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ är kontinuerlig.



Figur 4.3: Grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ för $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tag nämligen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och låt $\varepsilon > 0$. Låt $\delta = \min\left(\frac{1}{2}|x_0|, \frac{1}{2}\varepsilon x_0^2\right)$ och observera att detta tal är större än 0. Med $|x_0| = |x_0 - x + x| \leqslant |x_0 - x| + |x|$ får vi $|x| \geqslant |x_0| - |x - x_0| > |x_0| - \frac{1}{2}|x_0| = \frac{1}{2}|x_0|$ för alla x sådana att $|x - x_0| < \delta$. Detta ger

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \left|\frac{\frac{1}{2}\varepsilon x_0^2}{\frac{1}{2}|x_0| x_0}\right| = \varepsilon.$$

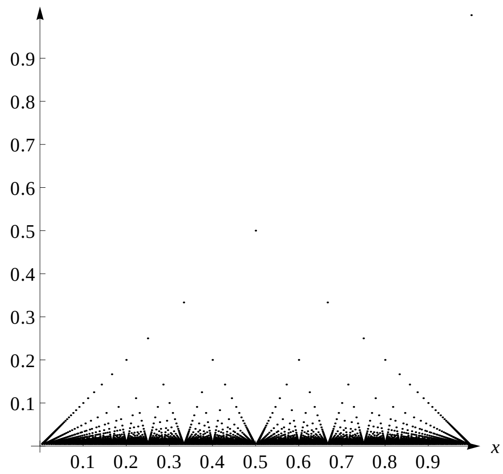
Här använde vi att $|x| \geqslant \frac{1}{2}|x_0|$ medför att $\frac{1}{|x|} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2}|x_0|}$. (Det kan vara instruktivt att jämföra detta exempel med det mycket liknande beviset av kvotegenskapen i Sats 2.4.1.) ▲

Exempel 4.1.6. Varje rationellt tal $x \in \mathbb{Q}$ kan på ett unikt sätt skrivas som $x = \frac{p}{q}$ där $p \in \mathbb{Z}$ och $q \in \mathbb{N}$ och p och q inte har någon gemensam faktor. (Vi har redan använt detta faktum i beviset av Sats 1.4.1. Se också den efterföljande diskussionen i Anmärkning 1.4.2.) Vi definerar en funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{om } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{om } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Denna funktion kallas för *Thomaes funktion* men också *popcornfunktionen*. Anledningen till detta funktionsnamn ses bäst i funktionsgrafen nedan.

Den här funktionen är kontinuerlig i alla irrationella tal men inte i de rationella talen, det vill säga för $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ men inte för $x_0 \in \mathbb{Q}$. Bägge påståenden beror på att det i varje öppet interval $I \neq \varnothing$ finns både rationella och irrationella tal, se Övning 3.9 och 3.10.



Figur 4.4: Grafen till Thomaes funktion.

Låt först $x_0 = \frac{p}{q}$ vara ett rationallt tal där p och q saknar gemensama faktorer. Vi låter $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. För alla $\delta > 0$ finns det ett irrationallt tal x i det öppna intervallet $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ och vi har $|f(x) - f(x_0)| = |0 - \frac{1}{q}| = \frac{1}{q} \not< \frac{1}{2q} = \varepsilon$.

I det andra fallet, låt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vara irrationellt. Låt $\varepsilon > 0$ och välj $q_0 \in \mathbb{N}$ så att $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Mängden X av alla rationella tal x i $[0, 1]$ som kan skrivas som $x = \frac{p}{q}$ där p och q saknar gemensama faktorer och $q \leqslant q_0$ är ändlig. Den är nämligen en delmängd av den ändliga mängden

$$\left\{ \frac{s}{t} \in \mathbb{Q} \mid t \in \{1, \dots, q_0\} \text{ och } s \in \{1, \dots, t\} \right\}.$$

Speciellt finns det ett helt intervall (a_0, b_0) som innehåller x_0 men inget av de rationella talen i X (ty mängden $(0, 1) \setminus X$ är unionen av ändligt många öppna intervall och vi kan välja det som innehåller x_0). Med $\delta = \min(x - a_0, b_0 - x)$ har vi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a_0, b_0)$. Dessutom gäller för alla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ att $f(x) = 0$ eller $f(x) = \frac{1}{q}$ med $q > q_0$ och därmed $|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} = \varepsilon$. ▲

Talföljder kan användas för att ge en alternativ karaktärisering av kontinuerliga funktioner.

Sats 4.1.7. *En funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i punkten x_0 om och endast om*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

för varje följd (x_n) av element av X som konvergerar mot x_0.

Bevis. Antag först att f är kontinuerlig i punkten x_0 och låt $\varepsilon > 0$. Det finns $\delta > 0$ så att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ för $|x - x_0| < \delta$ och $x \in X$. Låt (x_n) vara en följd som konvergerar mot x_0, och tag $N \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x_0| < \delta$ för alla

$n \geqslant N$. Det följer att $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ för alla $n \geqslant N$. Detta visar att $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Antag nu att $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ för alla följder (x_n) som konvergerar mot x_0. Vi behöver visa att f uppfyller (ε-δ)-definitionen för kontinuitet i x_0. Låt alltså $\varepsilon > 0$. Antag att det inte finns något $\delta > 0$ som uppfyller kraven. Speciellt finns det för alla $n \in \mathbb{N}$ något $x_n \in X$ med $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ och $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Följden (x_n) konvergerar mot x men följden $(f(x_n))$ konvergerar inte mot $f(x_0)$, en motsägelse. $\square$

En anledning att visa denna ekvivalens är att vi nu kan härleda flera viktiga egenskaper för kontinuerliga funktioner från räknereglerna för gränsvärden av talföljder.

Sats 4.1.8 (Egenskaper hos kontinuerliga funktioner)**.** *Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$, låt $f\colon X \to \mathbb{R}$ och $g\colon X \to \mathbb{R}$ funktioner som är kontinuerliga i en punkt $x_0 \in X$, och a, b reella tal.*

(i) *Funktionen $(af + bg)(x) = af(x) + bg(x)$ är kontinuerlig i punkten x_0.*

(ii) *Funktionen $(fg)(x) = f(x)g(x)$ är kontinuerlig i punkten x_0.*

(iii) *Funktionen $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ är kontinuerlig i x_0 om den är definerad där, det vill säga om $g(x_0) \neq 0$.*

Bevis. Alla egenskaperna (i), (ii) och (iii) följer från de motsvarande egenskaperna för gränsvärden av talföljder som vi visat i Sats 2.4.1. Låt oss därför endast bevisa (i); både (ii) och (iii) bevisas nästan identiskt. Låt

$$h(x) = af(x) + bg(x).$$

Vi vill visa att h är kontinuerlig i punkten $x_0 \in X$. Tag en talföljd (x_n) som konvergerar mot x_0. Det räcker enligt Sats 4.1.7 att visa att $h(x_n)$ konvergerar mot $h(x_0)$. Men $h(x_n) = af(x_n) + bg(x_n)$, och eftersom f och g är kontinuerliga funktioner ger en till tillämpning av Sats 4.1.7 att $f(x_n)$ och $g(x_n)$ konvergerar mot $f(x_0)$ och $g(x_0)$. Enligt Sats 2.4.1 gäller därför att då $n \to \infty$ har vi att

$$h(x_n) = af(x_n) + bg(x_n) \to af(x_0) + bg(x_0) = h(x_0),$$

vilket bevisar påståendet. $\square$

Exempel 4.1.9. Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ är kontinuerlig. Den kan nämligen skrivas som produkt av den kontinuerliga identitetsfunktion id med sig själv. Genom att upprepa detta argument visas att alla potensfunktioner $x \mapsto x^n$ är kontinuerliga. ▲

Sats 4.1.10. *Låt $g\colon X \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig i en punkt $x_0 \in X$, och låt f vara en funktion som är kontinuerlig i punkten $g(x_0)$. Då är* kompositionen *$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ kontinuerlig i x_0.*

Bevis. Låt $x_0 \in X$ och $\varepsilon > 0$. Eftersom f är kontinuerlig i punkten $g(x_0)$ finns det δ_1 så att $|f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$ om $|y - g(x_0)| < \delta_1$. Funktionen g är kontinuerlig i punkten x_0. Alltså finns det δ_2 så att $|g(x) - g(x_0)| < \delta_1$ om $|x - x_0| < \delta_2$. Detta visar att $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$ om $|x - x_0| < \delta_2$.

□

4.2 Gränsvärden av funktioner

Begreppet gränsvärde spelar en viktig roll i samband med kontinuerliga och deriverbara funktioner. Gränsvärdet av en funktion i en punkt x_0 beskriver hur funktionen f beter sig i punkter som ligger nära x_0, men beror *inte* på funktionens faktiska värde i x_0. Därför gör vi i nästa definition inte ens antagandet att funktionen är definierad i punkten x_0.

Definition 4.2.1. Låt $f\colon X \to \mathbb{R}$ vara en funktion, och låt $x_0 \in \mathbb{R}$. Vi antar att det existerar ett öppet intervall I kring punkten x_0 sådant att alla punkter av I utom möjligen x_0 självt ligger i mängden X. Funktionen f har *gränsvärdet* a då x går mot x_0 om det till varje $\varepsilon > 0$ finns något $\delta > 0$ med $|f(x) - a| < \varepsilon$ om $0 < |x - x_0| < \delta$ och $x \in X$. I detta fall skriver vi $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Anmärkning 4.2.2. Antagandet att det existerar ett öppet intervall I kring punkten X sådant att alla punkter av I utom möjligen x_0 självt ligger i mängden X innebär att om δ väljs tillräckligt litet så kommer $x \in X$ så fort $0 < |x - x_0| < \delta$.

Man kan också tala om gränsvärde i ∞ och $-\infty$. Vi gör följande definition.

Definition 4.2.3. Låt $f\colon X \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Vi antar att det existerar ett tal N sådant att det oändliga intervallet $[N, \infty)$ helt ligger i mängden X. Funktionen f har *gränsvärdet* a då x går mot ∞ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns något $M > 0$ med $|f(x) - a| < \varepsilon$ om $x \geqslant M$ och $x \in X$. I detta fall skriver vi $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$. På liknande sätt definieras gränsvärdet $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Innan vi visar några praktiska egenskaper av gränsvärden ska vi titta på några exempel.

Exempel 4.2.4. (i) Låt $X = \mathbb{R}$ och funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara absolutbeloppsfunktionen, det vill säga funktionen $f(x) = |x|$. Då har f gränsvärdet 0 då x går mot 0. Vi kan nämligen välja $\delta = \varepsilon$.

(ii) Betrakta funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definerad som

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{om } x \neq 0 \\ 1 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

Eftersom vi kräver $0 < |x - x_0|$, det vill säga $x \neq x_0$, i definitionen av gränsvärdet spelar funktionsvärdet av f i 0 ingen roll och vi har $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ som ovan.

▲

Alternativt kan vi definera gränsvärde genom att använda kontinuitetsbegreppet.

Sats 4.2.5. *Låt f vara definierad i ett intervall kring x_0, men inte nödvändigtvis i x_0, som tidigare. Då gäller att*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

om och endast om funktionen

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{om } x \neq x_0 \\ L & \text{om } x = x_0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i x_0.

Bevis. Antag att gränsvärdet är lika med L, och tag $\varepsilon > 0$. Enligt gränsvärdets definition finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - L| < \varepsilon$ om $0 < |x - x_0| < \delta$. Men i detta intervall är $|f(x) - L| = |F(x) - F(x_0)|$, så vi har att $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ om $|x - x_0| < \delta$. (I punkten $x = x_0$ är påståendet uppenbart sant.)

Antag att F är kontinuerlig i x_0, och tag $\varepsilon > 0$. Enligt definition av kontinuitet finns ett $\delta > 0$ sådant att $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ om $|x - x_0| < \delta$. Men speciellt är då $|f(x) - L| < \varepsilon$ om $0 < |x - x_0| < \delta$. □

Ur föregående sats kan vi dra följande två slutsatser:

Följdsats 4.2.6. *Antag att en funktion f är definierad på ett öppet intervall I. Då är f kontinuerlig i en punkt x_0 om och endast om*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Bevis. Låt $L = f(x_0)$ i Sats 4.2.5, vilket gör att $F(x) = f(x)$. □

Följdsats 4.2.7. *Antag att en funktion f är definierad på ett öppet intervall kring x_0, men inte nödvändigtvis i x_0 självt. Då är*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

om och endast om

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

för varje talföljd (x_n) som konvergerar mot x_0 med $x_n \neq x_0$ för alla n.

Bevis. Enligt Sats 4.2.5 är första gränsvärdet lika med L om och endast om funktionen F som definieras i satsen är kontinuerlig i x_0. Enligt Sats 4.1.7 gäller detta om och endast om $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0) = L$ för alla talföljder som konvergerar mot x_0. Det räcker nu att begränsa sig till talföljder med $x_n \neq x_0$ för alla n, eftersom då $x_n = x_0$ är också $F(x_n) = F(x_0)$. □

4.3 Satsen om mellanliggande värden

Hjälpsats 4.3.1. *Låt f vara en kontinuerlig funktion $X \to \mathbb{R}$, där X är någon delmängd av $\mathbb{R}$. Låt $x_0 \in X$, $A \in \mathbb{R}$, och antag att $f(x_0) > A$. Då finns det ett $\delta > 0$ sådant att $f(x) > A$ om $x \in X$ och $|x - x_0| < \delta$.*

Bevis. Låt $\varepsilon = f(x_0) - A > 0$. Enligt definitionen av kontinuitet finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ om $|x - x_0| < \delta$. Vi hävdar att detta δ fungerar. Antag motsatsen, att $f(x) \leqslant A < f(x_0)$ för något x med $|x - x_0| \leqslant \delta$. Då måste vi ha att

$$|f(x) - f(x_0)| = f(x_0) - f(x) \geqslant f(x_0) - A = \varepsilon,$$

vilket är en motsägelse. □

Sats 4.3.2 (Satsen om mellanliggande värden)**.** *Låt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion. För varje tal y som ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ finns ett tal $c \in [a, b]$ sådant att $f(c) = y$.*

Bevis. Antag för enkelhetens skull att $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ — fallet att olikheterna är vända åt andra hållet bevisas likadant. Låt oss införa mängden

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant y\}.$$

Mängden S är icke-tom (ty $a \in S$) och begränsad, så vi kan definiera

$$c = \sup S.$$

(Detta är det enda steget i beviset där vi använder att de reella talen är fullständiga.) Eftersom $S \subseteq [a, b]$ måste $a \leqslant c \leqslant b$. Vi hävdar nu att $f(c) = y$. Ty antag först att $f(c) < y$. Enligt Hjälpsats 4.3.1 existerar då ett intervall kring c på vilket funktionen f är mindre än y. Men då är detta intervall en delmängd av S, vilket säger emot att c är en randpunkt till S (Sats 3.2.12). Om $f(c) > y$ hittar vi i stället ett öppet intervall kring c på vilket funktionen är större än y, vilket också säger emot att c är en randpunkt. Det enda alternativet som återstår är att $f(c) = y$. □

4.4 Exempel: kvadratrotsfunktionen

Som en tillämpning av föregående sats kommer vi att definiera *kvadratrotsfunktionen*, eller mer allmänt, n:te rots-funktionen. Fixera ett heltal $n > 0$, och låt $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ vara funktionen $x \mapsto x^n$. Denna funktion är kontinuerlig enligt Exempel 4.1.9.

Sats 4.4.1. *För varje $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ finns det ett unikt tal $c \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ så att $c^n = x$.*

Bevis. Låt $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Det finns uppenbarligen ett tal b som uppfyller $b^n \geqslant x$. Talet x och restriktionen av funktionen f till intervallet $[0, b]$ uppfyller villkoren i satsen om mellanliggande värden, ty $f(0) = 0 \leqslant x \leqslant b^n = f(b)$. Alltså finns det något tal $c \in [0, b]$ som uppfyller $f(c) = x$, det vill säga, $c^n = x$.

Antag nu att det finns två sådana tal c_1 och c_2. Vi kan dessutom anta att $0 \leqslant c_1 < c_2$. Men detta innebär $c_1^n < c_2^n$, en motsägelse. □

Definition 4.4.2. Låt $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ och låt n vara ett heltal. Vi definierar *n:te roten av a*, och betecknar denna med $\sqrt[n]{x}$, som det unika icke-negativa reella tal som uppfyller

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

Anmärkning 4.4.3. Sats 4.4.1 är vad som brukar kallas *icke-konstruktiv*: vi har endast bevisat existensen av någonting, men satsen säger inget om hur man faktiskt gör för att beräkna detta. För att till exempel räkna ut en decimalutveckling av $\sqrt[n]{x}$ krävs något starkare än vad vi har bevisat.

Övningar

Övning 4.1. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen

(i) $f(x) = 2x - 1$,

(ii) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{för } x \geqslant 0 \\ -x - 1 & \text{för } x < 0, \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{för } x > 0 \\ -x - 1 & \text{för } x < 0 \\ 1 & \text{för } x = 0. \end{cases}$

Rita funktionsgrafen. Vad är $\lim_{x \to 0} f(x)$? Är funktionen kontinuerlig i punkten $x_0 = 0$?

Övning 4.2 ($\star$). Ett polynom är en funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

med $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Visa att polynom är kontinuerliga. (*Ledning:* Försök inte att göra det direkt ur (ε-δ)-definitionen! Använd satser som visats i detta kapitel.)

Övning 4.3 ($\star$). Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x) = x^3 - 5x + 18$. Visa att f har ett nollställe. (*Ledning:* Försök inte att räkna ut ett nollställe för hand! Använd resultatet av föregående övning.)

Övning 4.4 ($\star\star$). Antag att f är kontinuerlig på ett intervall, och att $f(x) \in \mathbb{Q}$ för alla x i intervallet. Visa att f är konstant. (*Ledning:* använd resultatet av Övning 3.10 och satsen om mellanliggande värden.)

Övning 4.5 $(\star\star)$**.** Antag att f och g är funktioner definierade i ett intervall kring x_0, men inte nödvändigtvis i x_0 självt. Antag att $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Låt $a, b \in \mathbb{R}$. Visa följande egenskaper för gränsvärden:

(i) $\lim_{x \to x_0} af(x) + bg(x) = aA + bB$;

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$;

(iii) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, om $B \neq 0$.

(*Ledning:* Använd dig av motsvarande resultat för talföljder, eller motsvarande resultat för kontinuerliga funktioner.)

Övning 4.6 $(\star\star)$**.** Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}.$$

(*Ledning:* faktorisera täljaren och nämnaren.)

Övning 4.7 $(\star\star)$**.** Visa att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{om } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{om } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

inte är kontinuerlig någonstans. (*Ledning:* Jämför med Exempel 4.4.)

Övning 4.8 $(\star\star)$**.**

(i) Visa att absolutbeloppet $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ är en kontinuerlig funktion.

(ii) Låt f vara en kontinuerlig funktion. Visa att funktionen $|f|,\ x \mapsto |f(x)|$, är kontinuerlig.

Övning 4.9 $(\star)$**.** Låt f och g vara kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$. Antag att $f(a) > g(a)$ och $f(b) < g(b)$. Visa att det finns en punkt c i intervallet med $f(c) = g(c)$.

Övning 4.10 $(\star\star\star)$**.** Låt $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion med $f(0) = f(2)$. Visa att det finns $c \in [0, 1]$ så att $f(c) = f(c + 1)$. (*Ledning:* Betrakta en lämplig hjälpfunktion.)

5 Kompakthet

I detta kapitel definierar vi vad det betyder för en delmängd av de reella talen att vara *kompakt*. Typexemplet på en kompakt mängd är ett slutet intervall $[a, b]$, men många satser man kan visa för en kontinuerlig funktion på ett intervall $[a, b]$ gäller på en godtycklig kompakt mängd och det är därför värt att studera detta begrepp separat.

Innan vi gör detta måste vi dock tala om *delföljder* av en talföljd. En delföljd av en talföljd är precis vad det låter som: det är en ny talföljd som fås genom att ta bort en del av termerna i en annan talföljd. Vi inleder med den viktigaste satsen om delföljder, som kallas *Bolzano–Weierstrass sats*, och säger att en begränsad talföljd har en konvergent delföljd. Med hjälp av denna sats visar vi sedan att varje så kallad *Cauchyföljd* är konvergent.

Till sist kommer vi fram till kompakthet. Vi definierar vad en kompakt mängd är för något, och med hjälp av de satser om delföljder vi har visat kan vi visa följande centrala resultat: en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar ett största och ett minsta värde.

5.1 Delföljder och Bolzano–Weierstrass sats

Genom att plocka några, men oändligt många, termer av en följd får vi en delföljd:

Definition 5.1.1. Låt (x_n) vara en följd och $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en avbildning med $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Följden $(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \ldots$ är en *delföljd* av följden (x_n).

Egenskapen $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ för alla $n \in \mathbb{N}$, det vill säga att funktionen σ är strikt växande, betyder att termerna i delföljden inte upprepar sig och kommer i samma ordning som i (x_n).

Exempel 5.1.2. Med avbildningen $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(n) = 2n$, det vill säga genom att välja bara varannan term av den oscillerande följden i Exempel 2.3.2(ii) får vi delföljden $0, 0, 0, \ldots$. ▲

Exempel 5.1.3. Betrakta talföljden

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots,$$

bestående av alla udda positiva heltal. En delföljd till denna skulle kunna inledas med

$$1, 7, 9, 11, 17, 21, 25, \ldots$$

eller

$$7, 9, 11, 13, 19, 16789, \ldots.$$

Dock är till exempel inte

$$1, 3, 9, 7, 13, 15, \ldots$$

en delföljd — talen 7 och 9 är listade i fel ordning. ▲

Sats 5.1.4 (Bolzano–Weierstrass sats)**.** *Varja begränsad följd har en konvergent delföljd.*

Bevis. Låt (x_n) vara en följd med $|x_n| \leqslant M$ för alla $n \in \mathbb{N}$, det vill säga samtliga termer x_n ligger i intervallet $I_0 = [-M, M]$ som har längd $2M$. Vi konstruerar rekursivt en följd av nästlade intervall (I_n) sådant att varje intervall I_n innehåller oändligt många termer av följden (x_n). Dessutom konstruerar vi en delföljd $(x_{\sigma(n)})$ så att $x_{\sigma(n)} \in I_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

Till att börja med delar vi upp intervallet $[-M, M]$ i två lika stora intervaller. I och med att följden har oändligt många termer ligger oändligt många termer i ett av intervallen $[-M, 0]$ och $[0, M]$. Vi kallar detta intervall för I_1 och väljer en term $x_{n_1} \in I_1$. Sedan halverar vi I_1 och kaller den halva som innehåller oändligt många termer av följden för I_2. Speciellt finns det en term $x_{n_2} \in I_2$ med $n_2 > n_1$. Observera att $|I_1| = \frac{1}{2}|I_0| = M$ och $|I_2| = \frac{1}{2}|I_1| = \frac{1}{4}|I_0| = \frac{1}{2}M$. Vi konstruerar alltså intervallet I_{k+1} genom att välja en halva av I_k som innehåller oändligt många termer av följden (x_n) och vi har $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k| = \left(\frac{1}{2}\right)^n M$. Dessutom väljer vi $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ med $n_{k+1} > n_k$.

Eftersom de reella talen är fullständiga (se Kapitel 3) finns det ett tal a som ligger i samtliga intervall I_n. Funktionen $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ med $\sigma(k) = n_k$ ger en delföljde $(x_{\sigma(n)})$ och vi hävdar att den konvergerar mot a. Låt nämligen $\varepsilon > 0$. Det finns $N \in \mathbb{N}$ så att $\varepsilon > |I_N| = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} M$. För $n \geqslant N$ ligger a och x_n i I_n och därför gäller $|x_n - a| \leqslant |I_n| < |I_N| < \varepsilon$. □

5.2 Cauchyföljder och fullständighet

Definition 5.2.1. En följd (x_n) är en *Cauchyföljd* om det för alla $\varepsilon > 0$ finns något $N \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x_m| < \varepsilon$ för alla $n, m \geqslant N$.

Hjälpsats 5.2.2. *Varje konvergent följd är en Cauchyföljd.*

Bevis. Detta påstående är en konsekvens av triangelolikheten. Låt (x_n) vara en följd som konvergerar mot x, och låt $\varepsilon > 0$. Det finns N så att $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ för alla $n \geqslant N$. För $n, m \geqslant N$ gäller på grund av triangelolikheten det följande:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leqslant \\ &\leqslant |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Hjälpsats 5.2.3. *Varje Cauchyföljd (x_n) är begränsad.*

Bevis. Låt $\varepsilon > 0$. Det finns något $N \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x_m| < \varepsilon$ för alla $n, m \geqslant N$. Speciellt gäller $|x_n - x_N| < \varepsilon$ för $n \geqslant N$. Triangelolikheten ger $|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| < \varepsilon + |x_N|$ för $n \geqslant N$. Detta visar att $x_n \leqslant \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, \varepsilon + |x_N|\}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. □

Sambandet mellan fullständigheten och följder är följande sats

Sats 5.2.4. *Varje Cauchyföljd av reella tal konvergerar.*

Bevis. Låt (x_n) vara en Cauchyföljd av reella tal. Enligt Hjälpsats 5.2.3 är följden begränsad och har enligt Bolzano–Weierstrass sats en konvergent delföljd $(x_{\sigma(n)})$ som har ett gränsvärde $x \in \mathbb{R}$. Vi påstår att hela följden (x_n) konvergerar mot x. Låt nämligen $\varepsilon > 0$ och låt $N \in \mathbb{N}$ så att $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ och $|x_{\sigma(n)} - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ för alla $n, m \geqslant N$. Låt $\hat{N} \in \mathbb{N}$ vara så att $\sigma(\hat{N}) \geqslant N$. Ett sådant tal $\hat{N}$ finns eftersom funktionen σ är monotont växande. Med hjälp av triangelolikheten får vi för $n \geqslant \hat{N}$ följande uppskattning

$$|x_n - x| = |x_n - x_N + x_N - x| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

som visar att följden konvergerar mot x. □

Detta så kallade *Cauchykriteriet* ger ett möjlighet att avgöra om en följd konvergerar utan att behöva känna till gränsvärdet.

5.3 Kompakta mängder

Låt oss börja med följande definition.

Definition 5.3.1. En delmängd $X \subseteq \mathbb{R}$ är *sluten* om det för varje konvergent talföljd (x_n) vars element ligger i X också gäller att $\lim_{n\to\infty} x_n$ ligger i mängden X.

Exempel 5.3.2. Kom ihåg att ett slutet intervall är ett intervall på formen $[a, b]$ för några tal a och b. Vi hävdar att ett slutet intervall är en sluten mängd (vilket är tur: annars skulle terminologin vara ganska förvirrande.) Ty antag att $X = [a, b]$, och att (x_n) är en konvergent följd av element av X. Eftersom $x_n \geqslant a$ för varje n, visar Sats 2.3.10 att även $\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant a$. På samma sätt ses att $\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant b$, så att $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$. ▲

Exempel 5.3.3. Intervallet $(0, 1)$ är inte sluten. Den konvergenta följden $(\frac{1}{n})$ har nämligen gränsvärdet 0 som inte är med i intervallet. ▲

Sats 5.3.4. *Följande två egenskaper är ekvivalenta för en delmängd $X \subseteq \mathbb{R}$.*

(i) *X är sluten och begränsad.*

(ii) *Varje följd (x_n) av element av X har en delföljd som konvergerar mot ett element av X.*

Om detta gäller säger vi att mängden X är kompakt.

Bevis. Låt först X vara en mängd som har egenskapen i (ii). Antag att X inte är begränsad. Då finns det för alla $n \in \mathbb{N}$ ett tal $x_n \in X$ med $|x_n| > n$. Följden (x_n) har ingen konvergent delföljd, en motsäglese. Detta visar att X behöver vara begränsad. Dessutom har varje delföljd av en konvergent följd samma gränsvärde som följden (Övning!). Alltså är X dessutom sluten.

Den motsatta slutsatsen är en konsekvens av *Bolzano-Weierstrass satsen* 5.1.4. Antag nämligen att X är begränsad och sluten. Varje följd i X är begränsad och har därför en konvergent delföljd. Eftersom X är sluten ligger gränsvärdet i X. □

Exempel 5.3.5. Varje slutet intervall $[a, b]$ är både slutet och begränsat, och därmed kompakt. ▲

Sats 5.3.6. *Låt $K \subset \mathbb{R}$ vara en icke-tom kompakt mängd. Då har K ett maximum och ett minumum, det vill säga ett största och ett minsta element.*

Bevis. Eftersom mängden K är icke-tom och begränsad, existerar $\sup K$. Enligt Sats 3.2.13 existerar en följd av element av K som konvergerar mot $\sup K$. Eftersom K är sluten innebär detta att $\sup K \in K$, så då måste $\sup K$ vara ett maximum till mängden K. Existensen av minimum visas på samma sätt. □

Sats 5.3.7. *Antag att $K \subset \mathbb{R}$ är kompakt, och att $f\colon K \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Då är även $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ en kompakt mängd.*

Bevis. Låt (y_n) vara en godtycklig följd av element i $f(K)$. Enligt definitionen av $f(K)$ kan vi för varje n välja ett tal $x_n \in K$ med $f(x_n) = y_n$. Eftersom K är kompakt har talföljden (x_n) en delföljd $(x_{\sigma(n)})$, som konvergerar mot ett element $x \in K$.

Vi hävdar nu att $(f(x_{\sigma(n)}))$ är en delföljd av (y_n) som konvergerar mot ett element i $f(K)$. Att detta är en delföljd är klart, eftersom $(x_{\sigma(n)})$ är en delföljd av (x_n) och $f(x_n) = y_n$. Funktionen f antogs vara kontinuerlig. Alltså gäller på grund av Sats 4.1.7 att $\lim_{n\to\infty} f(x_{\sigma(n)}) = f(x)$. Dessutom är $x \in K$ och därmed $f(x) \in f(K)$. Beviset är klart. □

Definition 5.3.8. Låt $f\colon S \to \mathbb{R}$ vara en funktion, där S är en godtycklig mängd. Vi säger att $s \in S$ är ett *minimum* (resp. *maximum*) till f om olikheten

$$f(x) \geqslant f(s)$$

(resp. $f(x) \leqslant f(s)$) gäller för alla $x \in S$.

Sats 5.3.9. *Låt K vara en icke-tom kompakt delmängd av $\mathbb{R}$, och $f\colon K \to \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då har f både ett minimum och ett maximum.*

Bevis. Enligt Sats 5.3.7 är mängden $f(K)$ kompakt. Alltså existerar enligt Sats 5.3.6 ett minsta och ett största element, säg $y_{\min}$ och $y_{\max}$, i $f(K)$. Välj element $x_{\min}$ och $x_{\max}$ i K sådana att

$$f(x_{\min}) = y_{\min} \text{ och } f(x_{\max}) = y_{\max}.$$

Nu gäller att $x_{\min}$ är ett minimum till f, och $x_{\max}$ är ett maximum. $\square$

Övningar

Övning 5.1 ($\star$)**.** Vilka av följande mängder är slutna? Vilka är begränsade? Vilka är kompakta? Ge ett bevis eller ett motexempel.

(i) intervallet $[0, \pi)$

(ii) $\mathbb{Q}$,

(iii) $[0, 1] \cup (1, 3]$,

(iv) $[0, 1] \cup [2, 3]$

Övning 5.2 ($\star$)**.** Vi har sett i texten att om $f : X \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion, där X är en sluten och begränsad delmängd av $\mathbb{R}$, så antar f ett största och ett minsta värde. Visa att påståendet är falskt om man tar bort ordet:

(i) kontinuerlig,

(ii) sluten,

(iii) begränsad.

Övning 5.3 ($\star$)**.** Antag att X och Y är slutna mängder. Visa att $X \cap Y$ är sluten.

Övning 5.4 ($\star$)**.** Antag att talföljden (x_n) konvergerar mot x. Visa att varje delföljd till (x_n) också konvergerar mot x.

Övning 5.5 ($\star\star$)**.** Antag att X och Y är slutna mängder. Visa att $X \cup Y$ är sluten. (*Ledning:* resultatet från förra övningen kan vara användbart.)

Övning 5.6 ($\star\star$)**.** Antag att $K_1, K_2, \dots, K_N$ är kompakta mängder. Visa att unionen

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_N$$

är kompakt. Vad händer om vi har en union av oändligt många kompakta mängder?

Övning 5.7 ($\star\star$)**.** Varje reellt tal x kan skrivas på formen $a + r$, där a är ett heltal och r ligger i intervallet $[0, 1)$. Till exempel har vi

$$\pi = 3 + 0.1415...,$$

eller

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Vi kallar a för *heltalsdelen* av x, och r för *bråkdelen* av x. Definiera nu en talföljd genom att låta x_n vara bråkdelen av $\sqrt{n}$. Eftersom $x_n \in [0, 1)$ för alla n är följden begränsad och har en konvergent delföljd. Ge ett exempel på en sådan delföljd.

Övning 5.8 ($\star\star$)**.** Låt f vara en funktion som är kontinuerlig på ett slutet intervall I. Visa att $f(I)$ är ett slutet intervall.

Övning 5.9 ($\star$)**.** Denna övning visar att resultatet från föregående övning är falskt om ordet ”sluten” ersätts med ordet ”öppet”. Låt $I = (0, 1)$. Ge ett exempel på kontinuerliga funktioner $f: I \to \mathbb{R}$ sådana att

(i) $f(I) = \mathbb{R}$.

(ii) $f(I) = [0, 1]$.

Övning 5.10 ($\star\star\star$)**.** Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion sådan att $f(x) > 0$ för alla x, men med

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Visa att f inte antar ett minsta värde, men att f nödvändigtvis antar ett största värde. Ge ett exempel på en sådan funktion.

6 Derivator

I detta kapitel introducerar vi något som de flesta läsare kanske redan har sett, nämligen *derivatan* av en deriverbar funktion. Derivatan av en funktion f är en ny funktion f'. Förhållandet mellan de bägge är att talet $f'(x_0)$ är ett mått på hur snabbt funktionen f förändras i punkten x_0: om f till exempel mäter positionen av ett föremål, kommer f' att vara ett mått på föremålets hastighet. Grafiskt kan derivatan beskrivas som lutningen av funktionsgrafen.

Efter den formella definitionen av derivata visar vi några grundläggande egenskaper. Speciellt visar vi *produktregeln* och *kedjeregeln*. Särskilt beviset av kedjeregeln är inte så enkelt som man kanske kan förvänta sig.

Slutligen visar vi en koppling till resultatet från föregående kapitel, att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd har ett största och ett minsta värde. Om funktionen dessutom är deriverbar, kan man ofta använda derivatan som en praktisk metod för att hitta dessa största och minsta värden.

6.1 Derivatans definition

Definition 6.1.1. En delmängd $U \subset \mathbb{R}$ kallas *öppen* om det för varje $x \in U$ existerar ett $\varepsilon > 0$ sådant att

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

Exempel 6.1.2. Oberservera att varje öppet intervall (a, b) är också öppet enligt en här definitionen. ▲

Definition 6.1.3. Låt U vara en öppen mängd, $f\colon U \to \mathbb{R}$ en funktion, och $x_0 \in U$. Vi säger att funktionen f är *deriverbar i punkten* x_0 om gränsvärdet

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existerar. Om så är fallet, betecknas värdet av gränsvärdet ovan med $f'(x_0)$ och kallas *derivatan av f i punkten* x_0. Om f är deriverbar i punkten x_0 för alla $x_0 \in U$ kallas f *deriverbar*, och funktionen

$$x \mapsto f'(x)$$

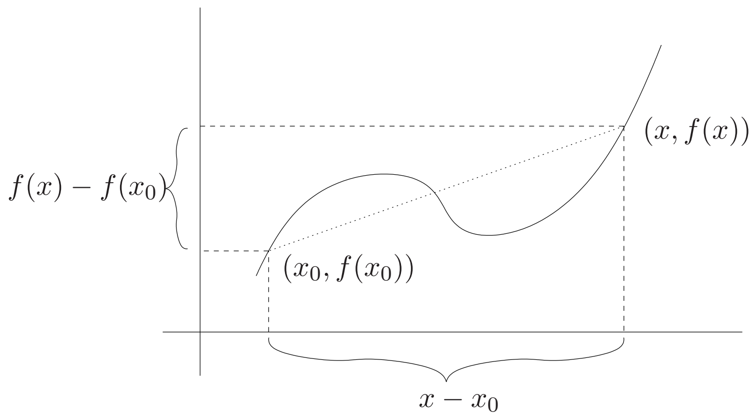
är *derivatan* av f.

Anmärkning 6.1.4. Ett sätt att tänka på derivata är följande. Inför funktionen

$$F_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{om } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{om } x = x_0. \end{cases}$$

Att f är deriverbar i punkten x_0 (med derivata $f'(x_0)$) är nu ekvivalent med att F_{x_0} är kontinuerlig i punkten x_0: detta är ett allmänt påstående om gränsvärden, som vi bevisade i Sats 4.2.5.

Hur kan man då tänka på funktionen F_{x_0}? Den geometriska tolkningen är att när $x \neq x_0$ returnerar funktionen F_{x_0} *lutningen* på den räta linjen mellan de två punkterna $(x_0, f(x_0))$ och $(x, f(x))$, som i Figur 6.1. Kontinuitet i punkten x_0 säger då att när x närmar sig x_0 kommer dessa lutningar att stabilisera sig kring något värde $f'(x_0)$, som vi tänker på som lutningen till en tangentlinje till grafen av f i punkten $(x_0, f(x_0))$.



Figur 6.1: Lutningen av en linje mellan två punkter på en funktionsgraf ges av kvoten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Funktionen F_{x_0} som infördes i föregående anmärkning kan användas för att bevisa att en deriverbar funktion alltid är kontinuerlig. (Detta kan också visas direkt ur definitionen.) Ty låt f vara deriverbar i punkten x_0, och låt F_{x_0} vara definierad som ovan. Vi hävdar nu att

$$F_{x_0}(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0). \tag{6.1}$$

Ty om $x \neq x_0$ är vänsterledet lika med $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0)$. Om $x = x_0$ är både vänster- och högerledet lika med noll. Vi skriver detta som

$$f(x) = F_{x_0}(x)(x - x_0) + f(x_0).$$

Högerledet är nu kontinuerligt (*sett som en funktion av* x) i punkten x_0: både $F_{x_0}(x)$ och $(x_0 - x)$ är kontinuerliga, så deras produkt är kontinuerlig (Hjälpsats 4.1.8), och att addera konstanten $f(x_0)$ påverkar inte kontinuitet. Alltså är även vänsterledet kontinuerligt i punkten x_0 — men vänsterledet är helt enkelt funktionen f vi startade med! Vi formulerar denna observation som en sats:

Sats 6.1.5. *Antag att en funktion f är deriverbar i punkten x_0. Då är f även kontinuerlig i punkten x_0.*

Omvändningen av satsen ovan är dock falsk: det existerar kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara. Ett exempel ges i en övning i slutet av detta kapitel, att absolutbeloppsfunktionen $x \mapsto |x|$ ej är deriverbar i origo. Det går till och med att konstruera exempel på funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är kontinuerliga i varje punkt, men inte deriverbara någonstans — dock skulle dessa konstruktioner ta oss för långt utanför kursen. Grafen till en sådan funktion ser ut ungefär som en börskurva: oavsett hur mycket man zoomar in ser linjen fortfarande ”hackig” ut, så att man inte kan tala om dess lutning.

Anmärkning 6.1.6. Många texter ger derivatans definition som

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Denna definition är ekvivalent med våran. Ett sätt att se detta är till exempel med talföljder: om (h_n) är en talföljd som konvergerar mot 0 med $h_n \neq 0$ för alla n, kan vi låta $x_n = x_0 + h_n$, och (x_n) är en talföljd som konvergerar mot x_0. För varje n gäller nu att

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

Låter vi $n \to \infty$ finner vi enligt Följdsats 4.2.7 att

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

6.2 Räknelagar för derivata

I detta avsnitt kommer vi att bevisa några (förhoppningsvis) välbekanta regler för hur man räknar med derivator. För att inte komplicera formuleringarna av satserna nedan allt för mycket, kommer vi inte explicit att skriva ut definitionsmängderna till funktionerna f, g och h; vi kommer inte heller att skriva ut exakt *var* funktionerna är deriverbara, utan endast säga att de är deriverbara funktioner.

Sats 6.2.1 (Linjäritet av derivata)**.** *Låt f och g vara deriverbara funktioner, och låt a och b vara reella tal. Om vi sätter $h(x) = af(x) + bg(x)$, så är h deriverbar med derivata*

$$h'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Bevis. Lämnas som Övning 6.1 i slutet av kapitlet. □

Sats 6.2.2 (Produktregeln)**.** *Antag att f och g är deriverbara funktioner. Då är funktionen $h(x) = f(x)g(x)$ deriverbar och*

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Bevis. Låt x_0 vara en punkt i definitionsmängden. Vi beräknar:

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0).
\end{aligned}$$

I det tredje steget av uträkningen gjorde vi ett litet trick: vi subtraherade $f(x)g(x_0)$, och adderade sedan omedelbart $f(x)g(x_0)$ igen. Anledningen till detta trick är att vi vill kunna göra faktoriseringen i fjärde steget. Men när $x \to x_0$ gäller att

$$\underbrace{f(x)}_{\to f(x_0)}\cdot\underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\cdot\underbrace{g(x_0)}_{\to g(x_0)}.$$

I det första gränsvärdet i ekvationen ovan använder vi att f är kontinuerlig, i det andra och tredje använder vi derivatans definition, och det fjärde gränsvärdet är uppenbart. Med hjälp av räknereglerna för gränsvärden, se Sats 2.4.1, finner vi därur att

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0) = f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0),$$

vilket skulle bevisas. □

Nästa sats, den så kallade *kedjeregeln*, är ökänt krånglig att bevisa. Trots våra bästa försök att strömlinjeforma beviset nedan är det helt enkelt lite struligt.

Sats 6.2.3 (Kedjeregeln)**.** *Antag att f och g är deriverbara funktioner, och låt $h(x) = f(g(x))$. Då är h deriverbar med*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Anmärkning 6.2.4. Beviset blir något enklare om man gör antagandet att $g(x) \neq g(x_0)$ om x ligger i ett tillräckligt litet intervall kring x_0 och $x \neq x_0$. Vi börjar med att beräkna:

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.
\end{aligned}$$

Det sista steget är tillåtet tack vara vårt antagande att $g(x) \neq g(x_0)$ — utan detta antagande skulle vi ha utfört division med 0 ovan! Vi hävdar nu att när $x \to x_0$ gäller att

$$\underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\to f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)},$$

vilket enligt Hjälpsats 2.4.1 skulle avsluta beviset. Gränsvärdet för den högra faktorn är helt enkelt derivatans definition, så endast den vänstra kräver ett argument. Vi lämnar detta argument åt läsaren som en övning i slutet av kapitlet, och bevisar i stället nu det allmänna fallet (där vi *inte* antar att $g(x) \neq g(x_0)$ för x i ett intervall runt x_0.)

Bevis av kedjeregeln. Som i Anmärkning 6.1.4 inför vi funktionen

$$F_{g(x_0)}(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{om } y \neq g(x_0), \\ f'(y) & \text{om } y = g(x_0). \end{cases}$$

Kom ihåg att vi visat att $F_{g(x_0)}$ är kontinuerlig. Sätter vi in $g(x)$ respektive $g(x_0)$ i stället för x respektive x_0 i ekvation (6.1) finner vi att

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = F_{g(x_0)}(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0)).$$

Vi kan alltså skriva

$$\begin{aligned} h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{F_{g(x_0)}(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} F_{g(x_0)}(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Men när $x \to x_0$ har vi att $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to g'(x_0)$, enligt derivatans definition, och

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} F_{g(x_0)}(g(x)) &= F_{g(x_0)}(g(x_0)) && \text{eftersom } F_{g(x_0)} \text{ är kontinuerlig} \\ &= f'(g(x_0)) && \text{enligt definitionen av } F_{g(x_0)}. \end{aligned}$$

Beviset är därmed klart. □

Anmärkning 6.2.5. Det är lätt att göra misstaget att anta att $g(x) \neq g(x_0)$, som i Anmärkning 6.2.4. Ett exempel finns i boken *A Course in Pure Mathematics* av G.H. Hardy, första utgåvan 1908. Hardy anses som en av de stora matematikerna genom tiderna, och boken nämns ofta som den första rigoröst skrivna läroboken i reell analys. Ändå dröjde det flera upplagor innan någon påpekade att bokens bevis av kedjeregeln var felaktigt — där görs just det förenklande antagandet att $g(x) \neq g(x_0)$ för x kring x_0.

6.3 Extrempunkter

Antagligen har de flesta av eleverna som följer denna kurs inte bara sett derivator förut, utan även deriverat funktioner många gånger: de flesta av er kan kanske derivera ett komplicerat uttryck som

$$\exp(\cos x) \cdot \sin(x^5 + \log x).$$

En viktig anledning att fokusera så mycket på derivator som gymnasiematematiken faktiskt gör är kopplingen mellan derivator och *extrempunkter*: derivatan kan användas för att detektera eventuella maximum och minimum till en funktion.

De relevanta definitionerna är följande.

Definition 6.3.1. Låt $f\colon X \to \mathbb{R}$ vara en funktion, där X är en delmängd av $\mathbb{R}$. Vi säger att $x_0 \in X$ är ett *lokalt maximum* (respektive ett *lokalt minimum*) om det existerar ett $\varepsilon > 0$ sådant att

$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad (\text{respektive } f(x_0) \leqslant f(x))$$

för alla $x \in X$ med $|x_0 - x| < \varepsilon$. En punkt som är ett lokalt minimum eller maximum kallas en *extrempunkt*.

Exempel 6.3.2. Om funktionen f har ett maximum (respektive ett minimum), se Definition 5.3.8, så är denna punkt också ett lokal maximum (respektive ett lokalt minimum). ▲

Sats 6.3.3. *Låt f vara en deriverbar funktion på en öppen mängd U, och antag att $x_0 \in U$ är en extrempunkt för f. Då är $f'(x_0) = 0$.*

Bevis. Vi antar att x_0 är ett lokalt maximum (beviset för minimum är likadant). Tag $\varepsilon > 0$ sådant att $f(x) \leqslant f(x_0)$ om $|x - x_0| < \varepsilon$. Låt (x_n) vara en godtycklig följd av element i intervallet $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ som konvergerar mot x_0. Då är

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Men nu är $x_n - x_0 > 0$ och $f(x_n) - f(x_0) \leqslant 0$ för varje n, eftersom varje x_n ligger i intervallet $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Alltså är varje term $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}$ mindre än eller lika med noll, och enligt Sats 2.3.10 är även gränsvärdet högst lika med noll. På samma sätt kan vi nu välja en följd (x_n) i intervallet $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ som konvergerar mot x_0, och

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Men nu är $x_n - x_0$ i stället negativt för alla n, medan $f(x_n) - f(x_0) \leqslant 0$ för alla n. Alltså är varje term $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}$ större än eller lika med noll. Det följer att gränsvärdet L uppfyller både $L \leqslant 0$ och $L \geqslant 0$, så $L = 0$. □

Med hjälp av resultaten från detta kapitel kan vi nu formulera en *algoritm* för att hitta det minsta och största värdet av en deriverbar funktion på ett intervall. Antag att f är en funktion som är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$, och deriverbar på (a, b). Enligt Sats 5.3.9 måste det existera ett största och ett minsta värde på intervallet $[a, b]$, och problemet är att hitta dessa. Ett minimum och ett maximum måste speciellt vara en extrempunkt, så enligt Sats 6.3.3 kan en punkt x_0 i det inre av intervallet endast vara ett minimum eller ett maximum om $f'(x_0) = 0$. Alltså ligger både minimum och maximum till funktionen f i mängden

$$\{a, b\} \cup \{x_0 \in (a, b) \mid f'(x_0) = 0\}.$$

För en given funktion f kommer i allmänhet mängden ovan att vara *ändlig*. Det räcker därför att räkna ut funktionsvärdet i var och en av dessa ändligt många punkter: det största av dessa värden är funktionens maximum (som vi vet existerar), och det minsta är funktionens minimum (som vi också vet existerar).

Övningar

Övning 6.1 ($\star$)**.** Visa linjäriteten för derivatan (Sats 6.2.1): För deriverbara funktioner f och g och $a, b \in \mathbb{R}$ är funktionen $h(x) = af(x) + bg(x)$ deriverbar med derivata

$$h'(x) = af'(x) + bg'(x).$$

Övning 6.2 ($\star$)**.** Använd produkt- och kedjeregel för att derivera funktionen

$$f(x) = \exp(\cos x) \cdot \sin(x^5 + \log x).$$

Vi förutsätter i den här övningen känt vad derivatan av funktionerna exp, sin, log, ... är.

Övning 6.3 ($\star$)**.** Använd derivatans definition för att visa att $f(x) = |x|$ ej är deriverbar i origo.

Övning 6.4 ($\star$)**.** En funktion kallas *växande* om $a \leqslant b$ innebär att $f(a) \leqslant f(b)$. Visa att om f är växande och deriverbar på ett öppet intervall, gäller $f'(x) \geqslant 0$ på intervallet. (*Ledning:* använd ett argument liknande det i Sats 6.3.3.)

Övning 6.5 ($\star$)**.** En funktion kallas *strikt växande* om $a < b$ innebär att $f(a) < f(b)$. Om f är strikt växande och deriverbar på ett öppet intervall, gäller det då att $f'(x) > 0$ på intervallet?

Övning 6.6 ($\star\star$)**.** Använd derivatans definition för att visa att om $f(x) = \frac{1}{x}$ för $x \neq 0$, så är

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Övning 6.7 ($\star\star$)**.** Använd produktregeln, kedjeregeln och resultatet från föregående övning för att visa den så kallade kvotregeln: om f och g är deriverbara funktioner, så är $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ deriverbar med derivata

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

för alla x sådana att $g(x) \neq 0$.

Övning 6.8 ($\star\star$)**.** En funktion kallas *jämn* om $f(-x) = f(x)$ för alla x. Visa att om f är jämn och deriverbar i origo, så är $f'(0) = 0$. (*Anmärkning:* Villkoret att f är jämn säger att grafen till f inte förändras om man speglar den i y-axeln.)

Övning 6.9 ($\star$)**.** I Sats 6.3.3 visade vi att om en deriverbar funktion har ett lokalt minimum eller maximum, är derivatan noll i denna punkt. Visa att omvändningen inte gäller: derivatan kan vara noll i någon punkt, utan att funktionen har ett minimum eller maximum där.

Övning 6.10 ($\star\star$)**.** Låt $n \geqslant 1$ vara ett positivt heltal. Förklara varför identiteten

$$(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$$

gäller för alla reella tal $x \neq y$.

Övning 6.11 ($\star\star$)**.** Använd identiten i föregående övning för att bevisa att om $f(x) = x^n$, så är $f'(x) = nx^{n-1}$, direkt ur derivatans definition.

Anmärkning: Det finns flera sätt att visa att $f'(x) = nx^{n-1}$. Ett annat sätt är att använda så kallad *induktion över n*, och produktregeln. Ett tredje sätt är att skriva derivatan som

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

och utveckla $(x+h)^n$ med hjälp av *binomialsatsen*. Läsare som känner till induktion och/eller binomialsatsen uppmuntras att försöka själva!

Övning 6.12 ($\star\star$)**.** Slutför beviset som påbörjades i Anmärkning 6.2.4. Med andra ord, visa följande: antag att f och g är deriverbara funktioner, och antag att $g(x) \neq g(x_0)$ för alla x i ett intervall kring x_0. Då gäller att

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = f'(g(x_0)).$$

Övning 6.13 ($\star\star\star$)**.** Låt $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara exponentialfunktionen. Förutsätt känt endast dessa två egenskaper:

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ för alla reella x och y;

(ii) $\exp$ är deriverbar i origo, med $\exp'(0) = 1$.

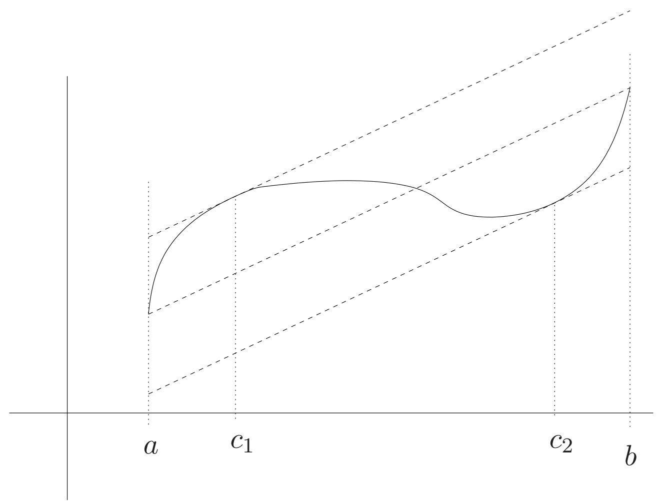
Visa att $\exp$ är deriverbar överallt, och att $\exp'(x) = \exp(x)$ för alla x.

7 Medelvärdessatsen

I detta kapitel bevisar vi den så kallade *medelvärdessatsen*. Denna sats uttrycker matematiskt något som kan tyckas intuitivt uppenbart, och som illustreras i följande exempel.

Exempel 7.0.4. Antag att Stina tar bilen från Stockholm till Eskilstuna (110 km) och är framme efter exakt 1 timme. Någon gång under sin bilresa har då hennes hastighet varit exakt 110 km/h. ▲

Den matematiska formuleringen handlar om derivator: för en funktion f som är deriverbar på ett intervall mellan punkterna a och b, måste det existera en punkt c i det inre av intervallet där derivatan till f är densamma som lutningen av en linje mellan ändpunkterna, som i Figur 7.1.



Figur 7.1: Ett exempel på medelvärdessatsen. I exemplet finns två möjligheter för punkten c; bägge är markerade i grafen.

I detta kapitel bevisar vi först medelvärdessatsen. Beviset använder många av de egenskaper hos de reella talen som vi har sett tidigare i kompendiet. Slutligen ger vi några intressanta tillämpningar av satsen: speciellt visar vi den så kallade *Darbouxs sats*, som säger att derivatan av en deriverbar funktion alltid har mellanliggande värde-egenskapen, och vi visar *l'Hôpitals regel*, som kan användas för att beräkna en viss sorts gränsvärden.

Satsens kanske viktigaste tillämpning tar vi dock inte upp — medelvärdessatsen är nämligen oumbärlig för att bevisa *integralkalkylens fundamentalsats*, att

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

(givet vissa villkor på f som gör att funktionen f' är integrerbar). Att ge en definition av integralen av en funktion, lika rigoröst som vi har varit hittills i detta kompendium, är dock omöjligt av utrymmesskäl, och vi hänvisar den intresserade läsaren till förslagen till vidare läsning i slutet av detta kompendium.

7.1 Bevis av medelvärdessatsen

Låt i detta kapitel $a < b$ vara två reella tal.

Sats 7.1.1 (Medelvärdessatsen)**.** *Antag att $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion, deriverbar på (a,b). Då existerar ett tal $c \in (a,b)$ sådant att*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Vi börjar med att bevisa specialfallet att $f(a) = f(b) = 0$, som brukar kallas för *Rolles sats*.

Sats 7.1.2 (Rolles sats)**.** *Antag att $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion, deriverbar på (a,b), och att $f(a) = f(b) = 0$. Då existerar ett tal $c \in (a,b)$ sådant att $f'(c) = 0$.*

Bevis. Mängden $[a,b]$ är sluten och begränsad, och därmed kompakt. Alltså följer från Sats 5.3.9 att f har ett maximum och ett minimum på $[a,b]$. Minst ett av dessa måste ligga i det inre av intervallet, alltså i (a,b): om inte, så antar f både sitt minsta och sitt största värde på randen. Men på randen är f noll, så i detta fall är $f(x) = 0$ för alla x i intervallet. Då är även varje punkt i det inre av intervallet ett minimum (och ett maximum).

Låt därför $c \in (a,b)$ vara ett minimum (eller maximum). Då är c också ett lokalt minimum (eller maximum), så enligt Sats 6.3.3 måste nu $f'(c) = 0$. □

Vi är nu klara att bevisa det allmänna fallet. Idén är att man med endast en liten modifikation av funktionen f kan vi skapa en ny funktion g som uppfyller att $g(a) = g(b) = 0$ — Rolles sats för funktionen g kan sedan användas för att härleda medelvärdessatsen för funktionen f. Med en ”liten” modifikation av f menar vi en funktion på formen $g(x) = f(x) + dx + e$, för några konstanter d och e. Villkoret att $g(a) = g(b) = 0$ bestämmer värdena på konstanterna unikt, men i vårt bevis kommer vi inte att härleda de korrekta värdena utan endast skriva ned ett allmänt uttryck för g och verifiera att detta stämmer.

Bevis av Sats 7.1.1. Inför funktionen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ med

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x - \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

Den är deriverbar enligt Sats 6.2.1 och vi hävdar att dessutom $g(a) = g(b) = 0$: insättning av $x = a$ ger

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a - \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)f(a) - a(f(b) - f(a)) - bf(a) + af(b)}{b - a} \\ &= \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a) - bf(a) + af(b)}{b - a} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Att $g(b) = 0$ verifieras likadant. Enligt Rolles sats existerar nu en punkt $c \in [a, b]$ med $g'(c) = 0$. Men

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

som man ser genom att derivera uttrycket för g med avseende på x. Så

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

det vill säga, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Beviset är därmed klart. □

7.2 Tillämpningar av medelvärdessatsen

Ett exempel på en tillämpning av medelvärdessatsen är följande.

Sats 7.2.1. *Låt U vara ett öppet intervall. Antag att en funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ är deriverbar på U, med $f'(x) \neq 0$ på hela intervallet. Då gäller $f(x) \neq f(y)$ för alla $x, y \in U$ med $x \neq y$.*

Bevis. Antag motsatsen. I så fall finns två tal $a < b$ i U med $f(a) = f(b)$. Enligt medelvärdessatsen finns då ett tal c mellan a och b sådant att

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0,$$

en motsägelse. □

En annan tillämpning är följande sats, som vid en första anblick kanske inte tycks särskilt förvånande.

Sats 7.2.2 (Darbouxs sats)**.** *Låt f vara deriverbar på ett öppet intervall som innehåller punkterna $a < b$. För varje tal y som ligger mellan $f'(a)$ och $f'(b)$, existerar det ett tal c mellan a och b sådant att $f'(c) = y$.*

Med andra ord, funktionen f' har samma egenskap som vi bevisade för kontinuerliga funktioner i *satsen om mellanliggande värden*, Sats 4.3.2. Anledningen att detta är anmärkningsvärt är att *derivatan av en deriverbar funktion behöver inte alls vara kontinuerlig!* Trots detta uppfyller alltså varje funktion som är derivatan av en annan funktion slutsatsen av satsen om mellanliggande värden, trots att den inte nödvändigtvis uppfyller hypoteserna.

Bevis av Darbouxs sats. Som i Anmärkning 6.1.4 låter vi för alla $x_0 \in U$

$$F_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{om } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{om } x = x_0, \end{cases}$$

och noterar att funktionen F_{x_0} är kontinuerlig. Observera att

$$F_a(a) = f'(a), \qquad F_b(a) = F_a(b), \qquad \text{och } F_b(b) = f'(b).$$

Eftersom talet y ligger mellan $f'(a)$ och $f'(b)$ vet vi därför att talet y antingen ligger mellan $F_a(a)$ och $F_a(b)$, eller mellan $F_b(a)$ och $F_b(b)$. Låt oss anta det föregående fallet (det andra fallet hanteras likadant). Eftersom F_a är en kontinuerlig funktion, ger den vanliga satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner (Sats 4.3.2) att det existerar ett tal d i intervallet (a, b) med

$$y = F_a(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}.$$

Men nu använder vi i stället medelvärdessatsen, som vi nyss bevisade: denna innebär att det finns ett tal c i intervallet (a, d) sådant att

$$f'(c) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = y.$$

Beviset är därmed klart. □

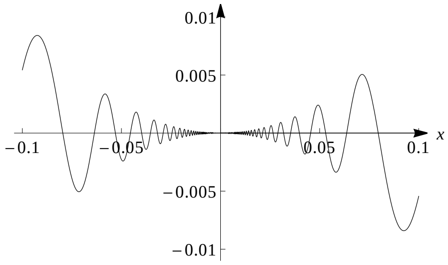
Exempel 7.2.3. Ett standardexempel på en funktion som är deriverbar men vars derivata är diskontinuerlig är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

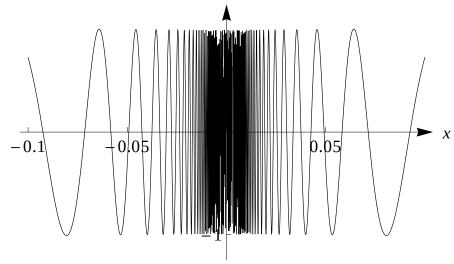
Man kan beräkna att

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

Grafer för f och dess derivata visas nedan i Figur 7.2 och Figur 7.3. Speciellt ser det i bilden ut som att f' inte är kontinuerlig i origo, men att f' fortfarande har mellanliggande värde-egenskapen. Dessa påståenden kommer att bevisas rigoröst i övningarna i slutet av detta kapitel. ▲



Figur 7.2: Funktionsgraf till f från Exempel 7.2.3.



Figur 7.3: Funktionsgraf till f' från Exempel 7.2.3.

7.3 Cauchys form av medelvärdessatsen, och l'Hôpitals regel

En lite starkare version av medelvärdessatsen, som vi nu kommer att bevisa, brukar kallas för Cauchys form av medelvärdessatsen. Med hjälp av denna kommer vi nu att bevisa den så kallade *l'Hôpitals regel*.

Sats 7.3.1. *Låt f och g vara två funktioner som är kontinuerliga på $[a, b]$ och deriverbara på (a, b). Det existerar ett tal c i intervallet sådant att*

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Bevis. Inför funktionen $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ enligt

$$F(x) = f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))\,.$$

Man kan beräkna att $F(b) - F(a) = 0$: om man sätter in $x = b$ och $x = a$ och multiplicerar ut allting, kommer alla termer att ta ut varandra. Vidare är F kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b), eftersom f och g är det. Alltså finns enligt medelvärdessatsen ett tal c i intervallet med $F'(c) = 0$. Men

$$F'(x) = f'(x)\,(g(b) - g(a)) - g'(x)\,(f(b) - f(a))\,,$$

så om $F'(c) = 0$ är

$$f'(c)\,(g(b) - g(a)) = g'(c)\,(f(b) - f(a))\,,$$

vilket skulle bevisas. □

Följdsats 7.3.2. *Låt $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner som är deriverbara på det öppna intervallet (a, b). Antag dessutom att $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a, b)$. Då finns något $c \in (a, b)$ så att*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(Speciellt är båda dessa bråk definierade, så vi har inte utfört division med noll.)

Bevis. Detta är Övning 7.5. □

Sats 7.3.3 (l'Hôpitals regel)**.** *Antag att $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ är två deriverbara funktioner. Låt $x_0 \in (a,b)$ vara en punkt med $f(x_0) = g(x_0) = 0$ och $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. I så fall är*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

så fort gränsvärdet till höger existerar.

Bevis. Tag en talföljd (x_n) som konvergerar mot x_0, med $x_n \neq x_0$ för alla n. Antag först att $x_n > x_0$. Restriktionerna av f och g till intervallet $[x_0, x_n]$ uppfyller kraven i Följdsats 7.3.2 och därmed finns det ett tal $c_n \in (x_0, x_n)$ så att

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

På samma sätt visar man att det även för $x_n < x_0$ finns något $c_n \in (x_n, x_0)$ med $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$.

Enligt vår konstruktion av talföljden (c_n) gäller $|x_n - x_0| \geqslant |c_n - x_0|$ för alla n; speciellt måste $\lim_{n\to\infty} c_n = x_0$. Det följer att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Den sista likheten är en konsekvens av Följdsats 4.2.7, eftersom vi antagit att gränsvärdet $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar och visat att (c_n) konvergerar mot x_0. Men en till tillämpning av Följdsats 4.2.7 visar nu (eftersom (x_n) valdes godtyckligt) att

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ □

Anmärkning 7.3.4. En variant av regeln ovan existerar också i fallet då f och g går mot oändligheten i punkten x_0, men detta kräver en aning mer arbete att bevisa.

Övningar

Övning 7.1 ($\star$)**.** Visa följande påstående: om en funktion är deriverbar på ett öppet intervall och dess derivata är noll överallt, är funktionen konstant.

Övning 7.2 ($\star$)**.** Antag att en funktion f är deriverbar på ett intervall U, och har minst n nollställen i intervallet. Visa att dess derivata har minst $n-1$ nollställen. (*Ledning:* Vad måste hända mellan två nollställen till f?)

Övning 7.3 ($\star\star$)**.** Använd resultatet från föregående övning för att visa att ett polynom av grad n kan inte ha mer än n nollställen. (*Ledning:* Du kan använda dig av följande faktum: om

$$f(x) = ax^n + \text{lägre ordnings termer}$$

är ett polynom av grad n, så är dess n:te derivata lika med

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a,$$

d.v.s. en konstant funktion.)

Övning 7.4 ($\star\star$)**.** I Övning 6.13 visades att exponentialfunktionen är sin egen derivata. Antag att $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion med $f(x) = f'(x)$ för alla x. Visa att f är en konstant multipel av exponentialfunktionen, det vill säga, $f(x) = c \cdot \exp(x)$ för något $c \in \mathbb{R}$. (*Ledning:* det räcker att bevisa att $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$ är en konstant funktion. Använd Övning 7.1.)

Övning 7.5 ($\star$)**.** Låt $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara två kontinuerliga funktioner som är deriverbara på det öppna intervallet (a,b). Dessutom gäller $g'(x) \neq 0$ för alla $x \in (a,b)$. Visa att det finns något $c \in (a,b)$ så att

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Övning 7.6 ($\star$)**.** Beräkna följande gränsvärden med hjälp av resultat från denna kapitel.

(i) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x)}{\pi - x}$,

(ii) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$. (Jämför med Övning 4.6.)

Övning 7.7 ($\star\star$)**.** Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

som nämndes i texten är deriverbar, och att dess derivata är som angivet i texten. Vi förutsätter att läsaren känner till de trigonometriska funktionerna och deras egenskaper, även om de inte gåtts igenom i denna text. (*Ledning:* För att beräkna derivatan i origo är det lättast att direkt använda derivatans definition, och definitionen av gränsvärde.)

Övning 7.8 ($\star\star\star$)**.** Visa att derivatan f' av funktionen från föregående uppgift antar varje värde i $[-1,1]$ oändligt många gånger i varje intervall $(-\delta, 0)$ och varje intervall $(0,\delta)$ där $\delta > 0$. (*Ledning:* Vad händer om $x = \frac{1}{2\pi n}$? Om $x = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$?)

Övning 7.9 ($\star\star\star$)**.** Använd resultatet från föregående övning för att dra slutledningen att derivatan f' som förekom i föregående uppgift inte är kontinuerlig i origo och har mellanliggande värde-egenskapen. (Använd inte Darbouxs sats.)

Lösningar till udda övningsuppgifter

Övning 1.1.

(i) $B \cup C = A$.

(ii) $B \cap C = \varnothing$.

(iii) $D \cap C = \{4, 36\}$.

(iv) $\{x \in D \mid x \in B\} = D \cap B = \{1, 19, 101\}$.

(v) $\{x \in A \mid x = y + 1 \text{ för något } y \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.

(vi) $\{x + 1 \mid x \in D\} = \{2, 5, 20, 37, 102\}$.

Övning 1.3. Tag $x \in \mathbb{N}$, det vill säga att x är något av talen $1, 2, 3, \ldots$. I synnerhet gäller $x \in \{1, 2, \ldots, x\} = B_x$ och därmed $x \in B_1 \cup B_2 \cup \ldots$. Eftersom x var godtycklig visar detta att $\mathbb{N} \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \ldots$.

Omvänt, antag att $x \in B_1 \cup B_2 \cup \ldots$. Det betyder att det finns ett heltal $n \geqslant 1$ så att $x \in B_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. I synnerhet gäller $x \in \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$. Detta visar att $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \subseteq \mathbb{N}$.

Eftersom båda inklusioner $\mathbb{N} \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \ldots$ och $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \subseteq \mathbb{N}$ gäller kan vi dra slutsatsen att $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots$.

Övning 1.5. Ett exempel ges av funktionen f definierad genom $f(1) = A$, $f(2) = B$, $f(3) = C$, $f(4) = B$. Vi kan välja $f(k)$ fritt bland A, B och C för $k = 1, 2, 3, 4$. Alltså ska vi välja ett av tre alternativ fyra gånger, så vi får totalt $3^4 = 81$ möjliga funktioner.

Övning 1.7. Alla utom ”Mängden av de naturliga talen” är påståenden. Det enda påståendet för vilket vi kan avgöra om det är sant eller falskt är ”Varje mängd innehåller minst ett element”, och detta påstående är falskt eftersom den tomma mängden inte innehåller något element.

Övning 1.9. Eftersom 3 är ett primtal precis som 2 kan vi resonera som i beviset till Sats 1.4.1: Vi antar att $\sqrt{3}$ är ett rationellt tal och skriver $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ med heltal p och q som inte har någon gemensam delare. Vi kvadrerar ekvationen och finner $3 = \frac{p^2}{q^2}$, som skrivs om till $3q^2 = p^2$. Eftersom $p^2 = p \cdot p$ är en produkt som är delbar med primtalet 3 måste även 3 dela en av faktorerna p och p (på samma sätt som produkten av två udda tal är udda gäller också att produkten av två tal som inte är delbara med 3 inte är delbar med 3, se Anmärkning 1.4.2). Alltså kan vi skriva $p = 3p'$ och $3q^2 = (3p')^2 = 9p'$. Vi delar med 3 och finner att $q^2 = 3p'$ och drar på samma sätt som ovan slutsatsen att $q = 3q'$. Detta visar att både p och q är delbara med 3, en motsägelse. Antagandet att $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ var alltså fel.

Vad händer nu om vi gör samma sak med $\sqrt{4}$? Som ovan leder likheten $\sqrt{4} = \frac{p}{q}$ till ekvationen $4q^2 = p^2$. Men från detta kan vi inte dra slutsatsen att p är delbart med 4. Talet 4 är nämligen inget primtal, och att 4 delar en produkt ab betyder inte att 4 delar a eller b. Betrakta till exempel produkten $12 = 2 \cdot 6$ som är delbar med 4, men ingen av faktorerna 2 eller 6 är delbar med 4. Inte ens i den speciella situationen att $a = b$ kan vi dra några slutsatser. Till exempel delar 4 talet $6^2 = 36$ men det delar inte faktorn 6.

Övning 2.1. (i) $[-1, 2] \cup (1, 5] = [-1, 5]$, som är ett slutet intervall.

(ii) $[-1, 2] \cap (1, 5] = (1, 2]$, som är varken öppet eller slutet.

(iii) $[3, 10] \setminus (5, 7) = [3, 5] \cup [7, 10]$ är unionen av två disjunkta slutna intervall.

(iv) Vi ser att $(3, 10] \setminus [5, 7) = (3, 5) \cup [7, 10]$ och $((3, 5) \cup [7, 10]) \cup [5, 6) = (3, 6) \cup [7, 10]$. Intervallet $(3, 6)$ är öppet och $[7, 10]$ är slutet.

(v) Först har vi $[4, 6] \setminus (4, 6) = \{4, 6\}$. Svaret är alltså $\{4, 6\} \cap (-2, 5] = \{4\}$. Vi kan också skriva $\{4\} = [4, 4]$ som alltså är ett slutet intervall.

Övning 2.3. Vi har att $|x - 1| = x - 1$ för $x \geqslant 1$ och $|x - 1| = -(x - 1)$ för $x < 1$. Dessutom gäller $|x + 1| = x + 1$ för $x \geqslant -1$ och $|x + 1| = -(x + 1)$ för $x < -1$. Vi behöver alltså särskilja tre olika fall: $x < -1$, $-1 \leqslant x < 1$ och $x \geqslant 1$.

Om $x < -1$ söker vi alltså lösningen till ekvationen $-(x-1)-(-(x+1)) = 1$, som kan skrivas om till $0 = 1$ och tydligen inte har någon lösning.

Sedan tittar vi på fallet $-1 \leqslant x < 1$. Ekvationen blir då $-(x-1)-(x+1) = 1$, som är ekvivalent med $x = -\frac{1}{2}$. Eftersom $x = -\frac{1}{2}$ ligger i intervallet $[-1, 1)$ ger detta en lösning till vårt problem.

Låt slutligen $x \geqslant 2$ och vi söker lösningen till ekvationen $(x - 1) - (x + 1) = 1$. Denna ekvation kan skrivas om till $0 = 1$ och har inte heller någon lösning.

Den enda lösningen till ekvationen är alltså $x = -\frac{1}{2}$.

Övning 2.5. Triangeloliketen (Sats 2.2.5) innebär att $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$. Genom att flytta över $|y|$ till andra sidan olikheten ser vi att $|x| - |y| \leqslant |x - y|$.

Övning 2.7. Med hjälp av *konjugatregeln* $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ kan vi skriva om

$$\begin{aligned}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} &= \frac{((n-1)(n+1))^n}{n^{2n}} = \frac{(n-1)^n(n+1)^n}{n^n n^n} = \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Eftersom gränsvärdena för båda faktorerna $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ och $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existerar, gäller enligt Sats 2.4.1:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{((n-1)(n+1))^n}{n^{2n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{e} \cdot e = 1.\end{aligned}$$

Övning 2.9. Nej. Tag till exempel följden $x_n = \frac{1}{n}$. Vi har $x_n > 0$ för alla n, men det gäller inte att $\lim_{n\to\infty} x_n > 0$ (ty $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$).

Övning 2.11. Tag $\varepsilon > 0$. Välj ett N_1 sådant att $|x_n - a| < \varepsilon$ om $n \geqslant N_1$, och ett N_2 sådant att $|z_n - a| < \varepsilon$ om $n \geqslant N_2$. Om $n \geqslant N = \max(N_1, N_2)$ gäller nu att

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Alltså ligger y_n i intervallet $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ om $n \geqslant N$, vilket skulle visas.

Övning 3.1. (i) Ja. Vi har $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} > 0$, vilket gör att $x_{n+1} \geqslant x_n$ för alla n.

(ii) Nej. Följden inleds med

$$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \ldots.$$

Alltså är $x_1 > x_2$ men $x_2 < x_3$ och följden är inte monoton.

(iii) Nej. Följden inleds med

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$$

Alltså är den först stigande, sedan avtagande, och inte monoton.

(iv) Ja. Om $n < m$ är $n^2 < m^2$, så $n^2 - 1000 < m^2 - 1000$, så $x_n < x_m$.

Övning 3.3. Vi börjar med att visa att (i) medför (ii). Antag alltså att (i) gäller och låt (x_n) vara en monotont växande och uppåt begränsad följd. Då är (x_n) också nedåt begränsad, eftersom $x_n \geqslant x_1$ för varje n. Alltså är den monoton och begränsad, så den konvergerar.

Näst visar vi att (ii) och (iii) är ekvivalenta. Om (x_n) är monotont växande och uppåt begränsad (säg av ett tal M), så kommer följden $(-x_n)$ att vara monotont avtagande och nedåt begränsad (av $-M$). Även omvändningen gäller. Men (x_n) konvergerar om och endast om $(-x_n)$ konvergerar, enligt räknereglerna för gränsvärden.

(ii) och (iii) tillsammans implicerar (i): Låt (x_n) vara en monoton och begränsad talföljd. Om den är monotont växande, så ger (ii) att (x_n) konvergerar. Om den är monotont avtagande, ger (iii) att (x_n) konvergerar. Oavsett är vi klara.

Övning 3.5. Vi gör endast fallet med supremum. Låt X vara en delmängd av $\mathbb{R}$, och antag att x och y är supremum till X. Vi vill visa att $x = y$. Eftersom y är ett supremum, är det också en övre gräns. Eftersom x är ett supremum, är x mindre än eller lika med varje övre gräns till X. Alltså är $x \leqslant y$. På samma sätt visas att $y \leqslant x$. Det följer att $x = y$.

Övning 3.7. Antag att $a_1 \leqslant 3$. Då är

$$a_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \leqslant \underbrace{\frac{a_1 + 3}{2}}_{=a_2} \leqslant \frac{3 + 3}{2} = 3,$$

så $a_1 \leqslant a_2 \leqslant 3$. På samma sätt får vi att

$$a_2 = \frac{a_2 + a_2}{2} \leqslant \underbrace{\frac{a_2 + 3}{2}}_{=a_3} \leqslant \frac{3+3}{2} = 3,$$

så $a_2 \leqslant a_3 \leqslant 3$. Upprepar vi argumentet får vi för varje n att $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 3$, så följden är monotont växande och uppåt begränsad av 3. Om $a_1 \geqslant 3$ används exakt samma argument men med omvänd riktning på olikhetstecknen.

Följden (a_n) närmar sig alltså punkten 3 genom att alltid halvera avståndet till 3.

Övning 3.9. Antag att det öppna intervallet är (a, b). Tag ett positivt heltal q för vilket

$$\frac{1}{q} < b - a.$$

Multiplicerar vi denna olikhet med q finner vi att

$$1 < qb - qa,$$

det vill säga, avståndet mellan qb och qa är *minst* 1. I så fall existerar ett heltal p i intervallet (qa, qb), och vi har att

$$qa < p < qb \implies a < \frac{p}{q} < b.$$

Dessutom finns det $N \in \mathbb{N}$ så att $\frac{1}{N} < b - \frac{p}{q}$. Men sedan är alla tal $\frac{p}{q} + \frac{1}{n}$ med $n \geqslant N$ rationella och de ligger i intervallet (a, b).

Övning 3.11. (i) $a_1 = \frac{2}{1} = 2$, $a_2 = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} = \frac{8}{3}$ och $a_3 = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{16}{5}$.

(ii) Vi har $a_{n+1} = a_n \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} = \frac{2n+2}{2n+1} a_n$ och därmed $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1}$.

(iii) Påståendet följer av följande uträkning:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{n}\cdot a_{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot a_n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^2 \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 \overset{\text{(ii)}}{=} \\ &= \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{n(2n+2)^2}{(n+1)(2n+1)^2} = \frac{4n(n+1)^2}{(n+1)(2n+1)^2} = \\ &= \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} = \frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+1} < 1.\end{aligned}$$

Eftersom $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 0$ medför $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 < 1$ att $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \sqrt{1} = 1$ som kan skrivas om till $x_{n+1} < x_n$. Detta visar att följden x_n är monotont avtagande.

(iv) På samma sätt räknar vi

$$\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{n+1}\cdot a_{n+1}}{\sqrt{n+2}\cdot a_n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)^2 \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 \overset{\text{(ii)}}{=}$$
$$= \frac{n+1}{n+n}\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+2)^2}{(n+2)(2n+1)^2} =$$
$$= \frac{4n^3+12n^2+12n+4}{4n^3+12n^2+9n+2}.$$

Täljaren är större än nämnaren (differensen $3n+2$ är större än noll) och därför är kvoten större än 1. Som i del (ii) kan vi dra slutsatsen att (y_n) är monotont växande.

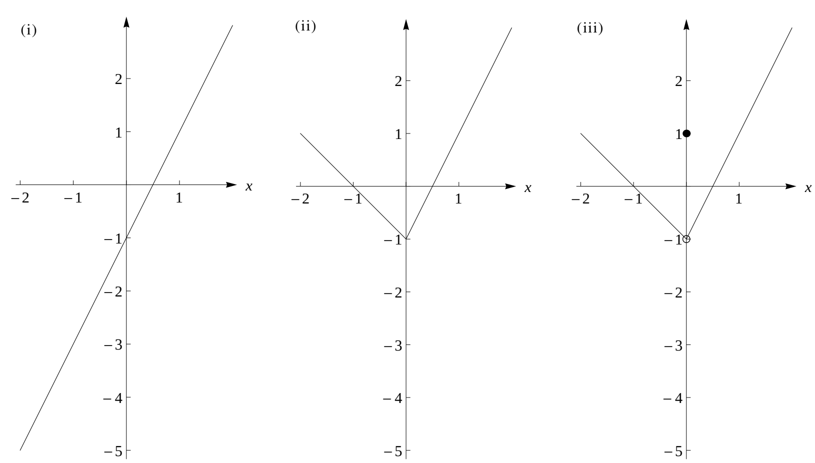
(v) Med lite jobb följer påståndet från det vi redan visat. Som vi har sett är följden (x_n) monotont avtagande, det vill säga vi har

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n \ldots.$$

Speciellt betyder det att $x_n \leqslant x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{1}} = 2$ för alla n. På samma sätt följer att $y_n \geqslant y_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Dessutom gäller olikheten $y_n = \frac{a_n}{\sqrt{n+1}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < x_n$. Sammanfattningsvis har vi

$$\sqrt{2} \leqslant y_n < x_n \leqslant 2$$

för alla $n \in \mathbb{N}$. Detta visar att följderna (x_n) och (y_n) är begränsade (alla termer ligger i intervallet $[\sqrt{2}, 2]$). Både följder är dessutom monotona vilket innebär (tack vara fullständigheten av $\mathbb{R}$) att de konvergerar.



Figur 4.4: Funktionsgraferna till Övning 4.1

Övning 4.1. (i) Vi påstår att $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$. Låt nämligen $\varepsilon > 0$. Vi har $|f(x)-(-1)| = |2x-1-(-1)| = |2x-1+1| = |2x| = 2|x|$. Med $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ gäller alltså $|f(x)-(-1)| < \varepsilon$ om $|x-0| < \delta$. I och med $f(0) = -1 = \lim_{x\to 0} f(x)$ är funktionen kontinuerlig i 0.

(ii) Även för den här funktionen gäller $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$. För att visa detta betraktar vi funktionerna $g(x) = 2x - 1$ och $h(x) = -x - 1$. Låt $\varepsilon > 0$. Vi har redan sett i del (i) att $|g(x) - (-1)| < \varepsilon$ för $|x - 0| > \frac{\varepsilon}{2}$. Dessutom har vi $|h(x) - (-1)| = |-x - 1 - (-1)| = |-x| = |x|$. Det följer att $|h(x) - (-1)| < \varepsilon$ för $|x - 0| < \varepsilon$. Eftersom $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ gäller med $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ att såväl $|g(x) - (-1)| < \varepsilon$ som $|h(x) - (-1)| < \varepsilon$ om $|x - 0| < \delta$. Speciellt gäller också $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ i detta fall. Detta visar att $\lim_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$ och f är kontinuerlig i 0.

(iii) I och med $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ endast behöver uppfyllas för alla x med $0 < |x - 0| < \delta$ ser vi att $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ som i del (ii). Men eftersom $f(0) = 1 \neq -1$ är denna funktion ej kontinuerlig i 0.

Övning 4.3. Enligt föregående övning är funktionen f kontinuerlig. Nu gäller att

$$f(-4) = -64 + 20 + 18 = -26,$$

medan

$$f(-3) = -27 + 15 + 18 = 6.$$

Alltså finns enligt satsen om mellanliggande värden (Sats 4.3.2) en rot i intervallet $(-4, -3)$.

Övning 4.5. Vi använder resultaten för kontinuerliga funktioner. Som vi har visat i Sats 4.2.5 är funktionerna

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{om } x \neq x_0 \\ A & \text{om } x = x_0 \end{cases}$$

och

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{om } x \neq x_0 \\ B & \text{om } x = x_0 \end{cases}$$

kontinuerliga i x_0. Alltså är även $aF + bG$, FG och $\frac{F}{G}$ (om $B \neq 0$) kontinuerliga i x_0, enligt Sats 4.1.8. Enligt Följdsats 4.2.6 innebär detta att dessa tre funktioner har gränsvärden $aA + bB$, AB och $\frac{A}{B}$ i punkten x_0, vilket avslutar beviset.

Övning 4.7. Låt $x_0 \in [0, 1]$, och tag $0 < \varepsilon < 1$. Om x_0 är rationellt är $f(x_0) = 1$. Oavsett hur litet $\delta > 0$ vi väljer kan vi hitta ett irrationellt tal x på avstånd mindre än δ från x_0, och för detta x gäller att

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon.$$

Om vi i stället har x_0 irrationellt kan vi för varje $\delta > 0$ hitta ett rationellt x. Även i detta fall har vi

$$|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon.$$

Övning 4.9. Inför funktionen $h(x) = f(x) - g(x)$. Enligt Sats 4.1.8 är h också kontinuerlig på intervallet. Vidare är $h(a) = f(a) - f(b) > 0$ medan $h(b) = f(b) - g(b) < 0$. Alltså finns enligt mellanliggande värde-satsen ett tal c i intervallet med $h(c) = 0$. Men då är $f(c) = g(c)$.

Övning 5.1. (i) Mängden är begränsad men inte sluten: tag till exempel talföljden $(\pi - \frac{1}{n})$, vars alla element ligger i intervallet, men gränsvärdet är π, som ligger utanför. Den är därför inte heller kompakt.

(ii) Mängden är varken sluten eller begränsad. För varje M finns ett rationellt tal r med $r > M$, vilket visar att den är obegränsad. För varje reellt tal x finns en talföljd av rationella tal som konvergerar mot x: en sådan kan till exempel konstrueras som i Exempel 3.2.14. Väljer vi x irrationellt ser vi att $\mathbb{Q}$ ej är sluten.

(iii) Vi har $[0, 1] \cup (1, 3] = [0, 3]$, ett slutet intervall. Mängden är sluten och begränsad och därmed kompakt.

(iv) Denna mängd är också sluten och begränsad, och därmed kompakt.

Övning 5.3. Antag att (x_n) är en konvergent talföljd med $x_n \in X \cap Y$ för alla n, och antag att $x_n \to x$. Eftersom vi också har $x_n \in X$, och X är sluten, måste vi ha $x \in X$. På samma sätt ser vi att eftersom $x_n \in Y$ för alla n, och Y är sluten, måste $x \in Y$. Men då är $x \in X \cap Y$, så $X \cap Y$ är sluten.

Övning 5.5. Antag att (x_n) är en konvergent talföljd med $x_n \in X \cup Y$ för alla n, och antag att $x_n \to x$. Eftersom följden har oändligt många element, och varje element ligger i någon av mängderna X och Y, måste det existera en delföljd $(x_{\sigma(n)})$ av (x_n) sådan att alla $x_{\sigma(n)}$ ligger i samma mängd, säg X. Enligt föregående uppgift är även $(x_{\sigma(n)})$ en konvergent talföljd som konvergerar mot x. Eftersom X är sluten, har vi $x \in X$. Det följer att $x \in X \cup Y$.

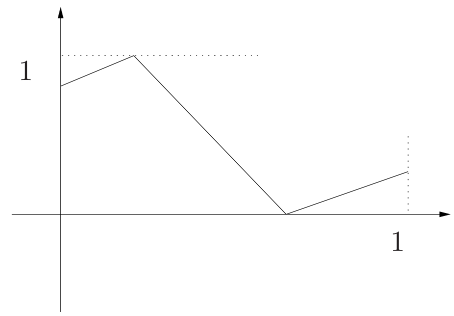
Övning 5.7. Den viktiga observationen är att i denna talföljd finns det oändligt många n där $x_n = 0$, nämligen alla n som är en jämn kvadrat! (Att n är en jämn kvadrat innebär att $n = k^2$ för ett heltal k.)

Tag därför till exempel delföljden som ges av $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sigma(n) = n^2$. Då är $x_{\sigma(n)}$ lika med bråkdelen av $\sqrt{n^2} = n$. Men n är ett heltal, så dess bråkdel är noll. Alltså är $x_{\sigma(n)} = 0$ för alla n, så delföljden $x_{\sigma(n)}$ konvergerar (mot noll).

Övning 5.9. (i) Tag till exempel funktionen

$$f(x) = \cot\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{\sin(\frac{x}{\pi})}{\cos(\frac{x}{\pi})}.$$

(ii) Det är lättare att rita en bild än att skriva ned en formel för f. Se illustrationen i Figur 5.5.



Figur 5.5: En kontinuerlig funktion på intervallet $(0, 1)$ med bild $[0, 1]$.

Övning 6.1. För varje x_0 gäller

$$\begin{aligned}
h'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(af(x) + bf(x_0)) - (af(x_0) + bf(x))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{a(f(x) - f(x_0)) + b(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(a\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + b\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\
&= a \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + b \left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\
&= af'(x_0) + bg'(x_0).
\end{aligned}$$

Övning 6.3. Derivatan i origo ges av gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Men för $x > 0$ är $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, och för $x < 0$ är $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Alltså kan inte gränsvärdet existera: beviset är snarlikt argumentet för att trappstegsfunktionen i Exempel 4.2 ej är kontinuerlig i origo.

Övning 6.5. Nej. Tag till exempel funktionen $f(x) = x^3$. Denna är strikt växande, men dess derivata är noll i origo.

Övning 6.7. Låt $q(x) = \frac{1}{x}$. Nu gäller att

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot q(g(x)),$$

så fort $g(x) \neq 0$. Enligt produkt- och kedjeregeln får vi att

$$h'(x) = f'(x)q(g(x)) + f(x)q'(g(x))g'(x).$$

Sätter vi nu in att $q(x) = \frac{1}{x}$ och $q'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (enligt föregående uppgift) fås

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Sätter vi slutligen dessa på ett gemensamt bråkstreck fås

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

vilket skulle bevisas.

Övning 6.9. Tag till exempel funktionen $f(x) = x^3$. Derivatan i origo är noll, men origo är varken ett lokalt minimum eller maximum.

Övning 6.11. Enligt derivatans definition har vi att

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x}.$$

Men enligt identiteten i föregående uppgift gäller att

$$\frac{t^n - x^n}{t - x} = x^{n-1} + x^{n-2}t + \ldots + xt^{n-2} + t^{n-1},$$

så vi måste beräkna

$$\lim_{t \to x}(x^{n-1} + x^{n-2}t + \ldots + xt^{n-2} + t^{n-1}).$$

För varje x är funktionen $g(t) = x^{n-1} + x^{n-2}t + \ldots + xt^{n-2} + t^{n-1}$ tydligen kontinuerlig (se Sats 4.1.8), så enligt Sats 4.2.6 gäller att

$$\lim_{t \to x}(x^{n-1} + x^{n-2}t + \ldots + xt^{n-2} + t^{n-1}) = x^{n-1} + x^{n-2}x + \ldots + xx^{n-2} + x^{n-1}.$$

Här har vi alltså en summa av n termer (räkna dem!) som alla är lika med x^{n-1}. Deras summa är alltså nx^{n-1}, vilket skulle bevisas.

Övning 6.13. Tag $x \in \mathbb{R}$. För att derivera exp i punkten x, ställer vi upp derivatan enligt Anmärkning 6.1.6:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \overset{(i)}{=} \\
&= \lim_{h \to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} \overset{(\text{Övn. } 4.5)}{=} \\
&= \exp(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h} = \\
&= \exp(x) \cdot \exp'(0) \overset{(ii)}{=} \\
&= \exp(x).
\end{aligned}$$

Övning 7.1. Antag motsatsen, att f ej är konstant. I så fall finns a och b med $f(a) \neq f(b)$. Enligt medelvärdessatsen existerar då ett tal c mellan a och b med

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0,$$

en motsägelse.

Övning 7.3. Låt f vara ett polynom av grad n,

$$f(x) = ax^n + \text{lägre ordnings termer}.$$

Antag att f har minst $n+1$ nollställen. Enligt föregående uppgift har dess derivata f' minst n nollställen, dess andraderivata $f^{(2)}$ har minst $n-1$ nollställen, och så vidare, fram tills att dess n:te derivata har minst ett nollställe. Men dess n:te derivata är

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a,$$

som är konstant. Så det enda sättet den n:te derivatan kan ha ett nollställe är om $a = 0$, vilket säger emot att f har grad n.

Övning 7.5. Enligt Sats 7.3.1 finns det $c \in (a, b)$ så att

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)) \tag{7.1}$$

Att $g'(x) \neq 0$ på hela intervallet innebär speciellt att $g'(c) \neq 0$ men även att $g(a) \neq g(b)$ på grund av Sats 7.2.1. Nu återstår bara att dela båda sidorna av Ekvation (7.1) med de nollskilda termerna $g'(c)$ och $g(b) - g(a)$.

Övning 7.7. För $x \neq 0$ är f deriverbar, givet att vi vet att sin är en deriverbar funktion. Derivatan finner vi med hjälp av produkt- och kedjeregeln, detaljerna lämnas åt läsaren. I origo behöver vi använda definitionen av derivata:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vi vill visa att detta gränsvärde är 0. Tag $\varepsilon > 0$. Vi har att

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x|,$$

eftersom $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$ för alla x. Om vi sätter $\delta = \varepsilon$ gäller därför att om $|x - 0| = |x| < \delta$ så kommer

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leqslant |x| = \varepsilon.$$

Alltså existerar gränsvärdet och är noll, så funktionen är deriverbar med den derivata som vi angivit.

Övning 7.9. Låt $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vi har visat i föregående uppgift att det i varje intervall $(-\delta, \delta)$ finns något x med $f'(x) = 1$. Detta x har alltså egenskapen att $|x - 0| = |x| < \delta$ men $|f'(x) - f(0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$. Därmed är f' inte kontinuerlig.

För att visa egenskapen om mellanliggande värden, tag två punkter $a < b$, och ett tal y mellan $f(a)$ och $f(b)$. Vi ska visa att det existerar ett c mellan a och b, sådant att $f(c) = y$.

Antag först att $a < b < 0$. I så fall är f' kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, så vi vet enligt satsen om mellanliggande värden att ett sådant c existerar. På samma sätt hanteras $0 < a < b$.

Antag sedan att $a \leqslant 0 \leqslant b$. Om y ligger i intervallet $[-1, 1]$ så är vi klara enligt föregående uppgift. Antag att $y > 1$; fallet att $y < -1$ hanteras likadant. Eftersom y ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$ är minst ett av dessa tal också större än y. Låt oss anta att $f(b) > y$; fallet att $f(a) > y$ hanteras likadant. Speciellt ser vi att $b \neq 0$, eftersom $f(0) = 0$ inte är större än y. Enligt föregående uppgift finns det ett element d i det icke-tomma intervallet $(0, b)$ med $f(d) = 1$, säg. Men då har vi

$$f(d) < y < f(b),$$

och $0 < d < b$, så enligt satsen om mellanliggande värden finner vi ett element i intervallet $[d, b]$ (där f' är kontinuerlig) som avbildas på y.

Förslag till vidare läsning

Mattucks bok nedan är en lite ovanlig och mycket trevlig bok, menad som kurslitteratur i en första kurs i reell analys på universitetsnivå. Den är noggrann och fullkomligt rigorös, men skriven med en lättsam och och humoristisk ton, och pekar i detalj ut ”tankefällor” som är vanliga bland analys-nybörjare.

Persson–Böiers är en standardbok i analys för förstaårselever på högskolan, som t.ex. används hos oss på KTH. Till skillnad från vår kurs är denna mer inriktad på praktiska tillämpningar och att faktiskt kunna räkna ut saker.

Rudins bok är en riktig matematisk klassiker (första upplagan 1953) som fortfarande används världen över. Detta är en kort och koncis bok som utan prat bygger upp fundamentet för reell analys från grunden. Ett exempel: 9 sidor in i boken har Rudin definierat begreppet *ordnad kropp*, noggrant bevisat en sådans grundläggande egenskaper, formulerat vad det betyder för en ordnad kropp att vara fullständig (motsvarande vårt Kapitel 3), och formulerat satsen att de reella talen är en fullständig ordnad kropp.

[1] Arthur Mattuck: *Introduction to Analysis.* 1:a upplagan. Prentice Hall, 1999.

[2] Arne Persson & Lars-Christer Böiers: *Analys i en variabel.* Studentlitteratur, 2001

[3] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* 3:e upplagan. McGraw–Hill, 1976.

Böckerna ovan, och många andra böcker, finns att låna på Matematikbiblioteket, Lindstedtsvägen 25 (bottenvåningen). Biblioteket är öppet för alla.

Sakregister