Fourierserier och ljudkompression

Joakim Roos
joakimrs@math.kth.se

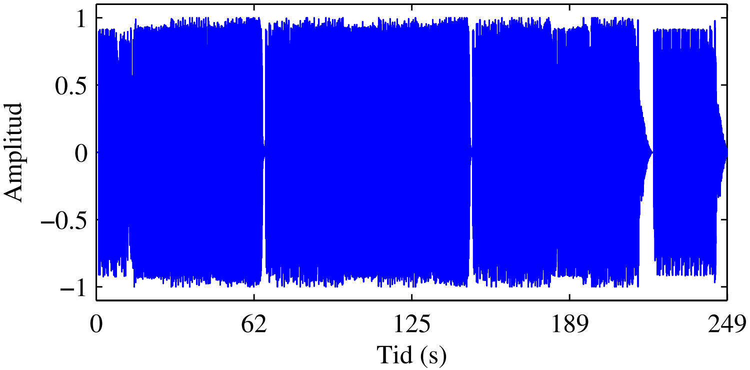
5 februari 2015

Problemformulering

Studera valfri låt!

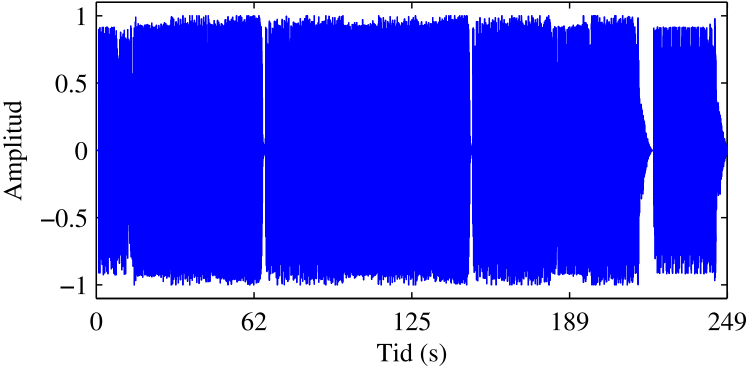
Problemformulering

Studera valfri låt! Exempelvis:



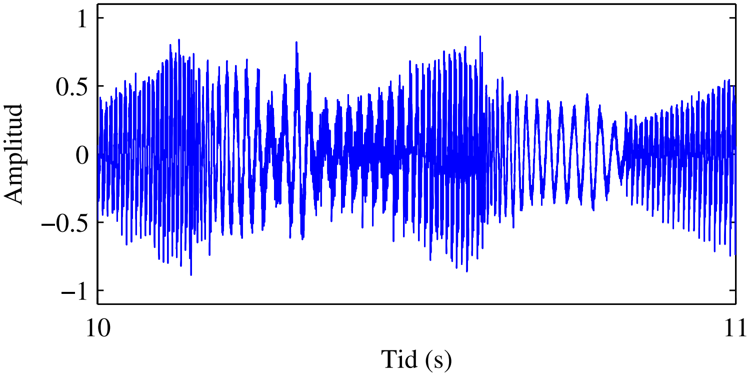
Problemformulering

Studera valfri låt! Exempelvis: (Psy - Gangnam Style)



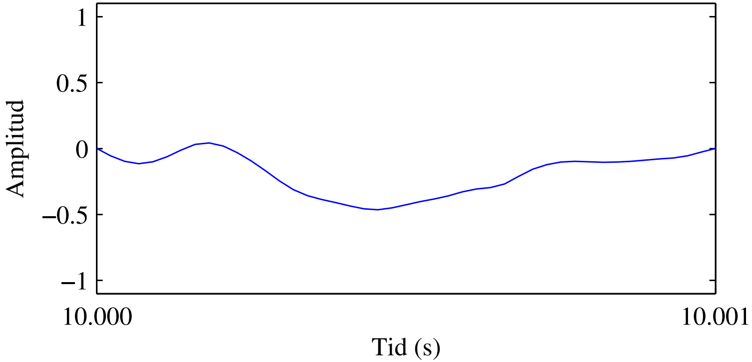
Problemformulering

Inzoomning nära $t = 10$ s:



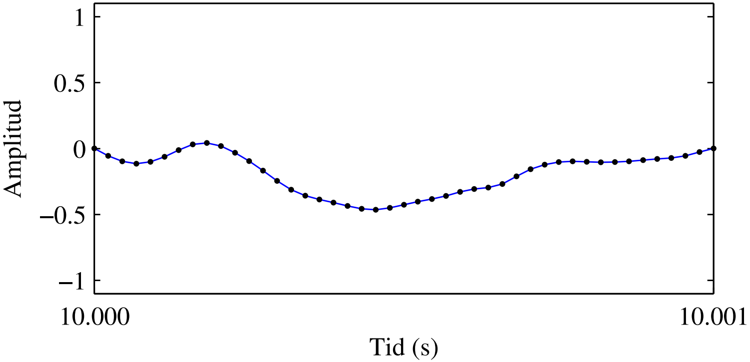
Problemformulering

Inzoomning nära $t = 10$ s:



Problemformulering

Inzoomning nära $t = 10$ s:



Problemformulering

Problem: *Många* datapunkter/funktionsvärden krävs för en hel låt.

Problemformulering

Problem: *Många* datapunkter/funktionsvärden krävs för en hel låt.
(Hela 10 987 520 stycken i exemplet...)

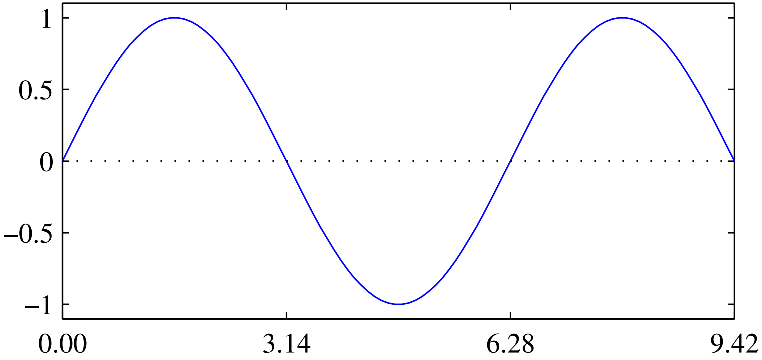
Problemformulering

Problem: *Många* datapunkter/funktionsvärden krävs för en hel låt. (Hela 10 987 520 stycken i exemplet...)

Kan vi finna ett sätt att minska denna datamängd utan att signalens utseende förändras för mycket?

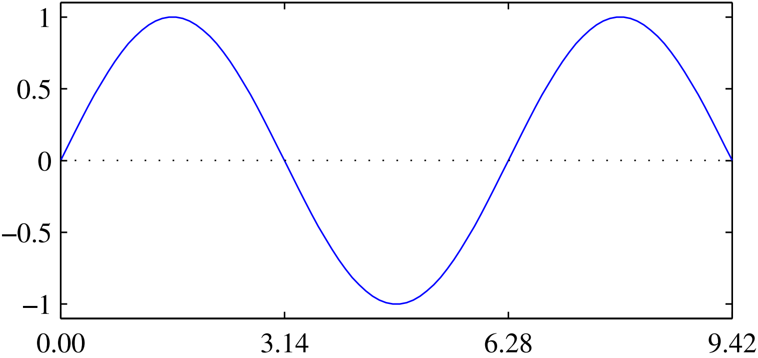
Sinusfunktionen

$sin(t)$:



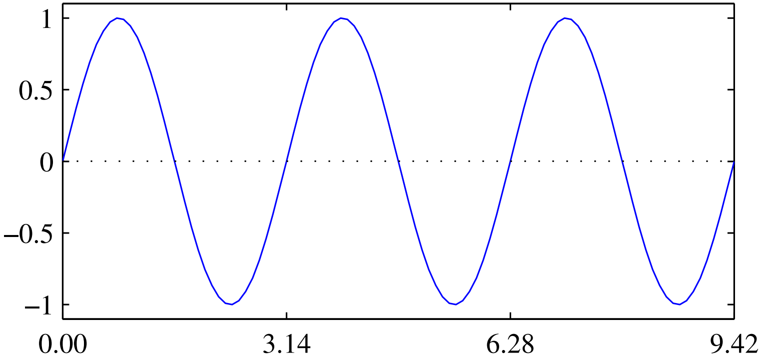
Sinusfunktionen

$sin(t)$: Periodisk funktion med period 2π



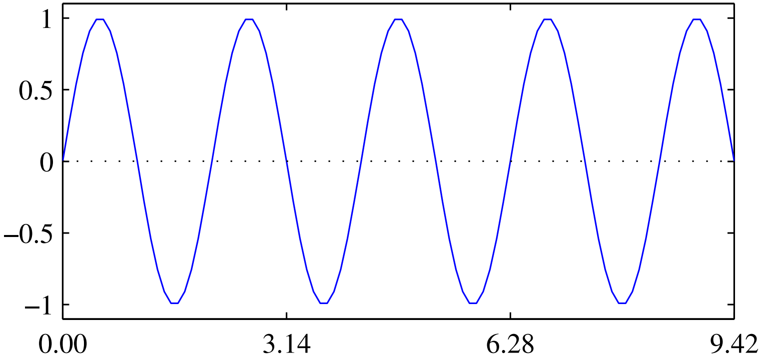
Sinusfunktionen

$sin(2t)$: Periodisk funktion med period π



Sinusfunktionen

$sin(3t)$: Periodisk funktion med period $2\pi/3$



Integrering

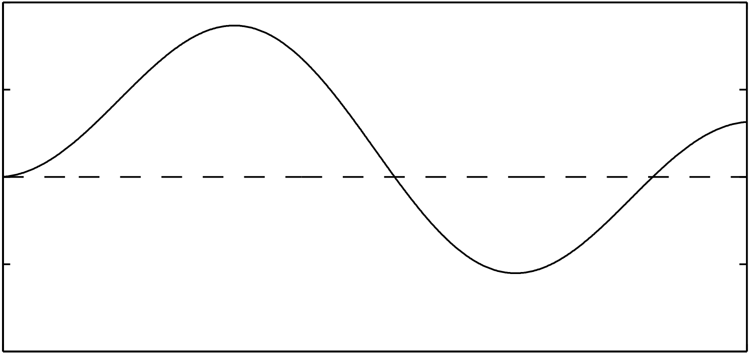
Integralen av en funktion $f = f(t)$ över ett intervall $a \leq t \leq b$ skrivs

$$\int_a^b f(t)dt$$

och är lika med *arean* mellan funktionens graf och t-axeln, räknat så att area ovanför t-axeln bidrar *positivt* till integralens värde, och area under t-axeln bidrar *negativt*.

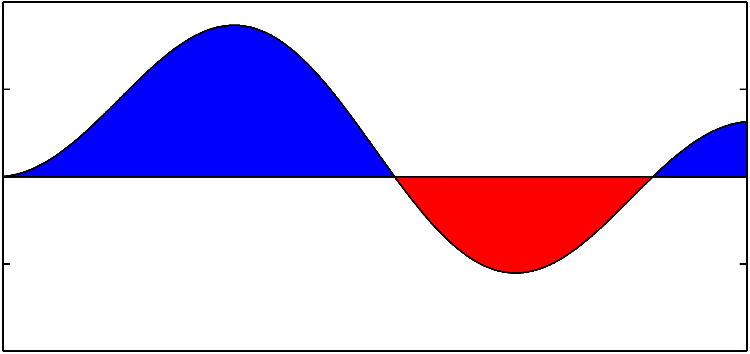
Integrering

Exempel: Antag att en funktion $f(t)$ har utseendet



Integrering

Exempel: Antag att en funktion $f(t)$ har utseendet



$$\int_a^b f(t)dt = \text{(blå area)} - \text{(röd area)}$$

Fourierserieutveckling

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t) \ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$f(t) =$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\dots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \dots$ så att

$$f(t) = b_1$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$f(t) = b_1 \sin(t)$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t) \ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$f(t) = b_1 \sin(t) +$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$f(t) = b_1 \sin(t) + b_2$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t) \dots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \dots$ så att

$$f(t) = b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t)$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t) \ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$f(t) = b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t)$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t) \ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$f(t) = b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \ldots$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\dots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \dots$ så att

$$\begin{aligned} f(t) &= b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \end{aligned}$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t) \ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$\begin{aligned} f(t) &= b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt) \right) \end{aligned}$$

Fourierserieutveckling

Antag en given funktion $f = f(t)$ definierad på $0 \leq t \leq \pi$.

Idé: Använd funktionerna $\sin(t)$, $\sin(2t)$, $\sin(3t)\ldots$ som *byggstenar* för att finna ett alternativt sätt att uttrycka $f(t)$.

Vi vill försöka finna konstanter $b_1, b_2, b_3, \ldots$ så att

$$\begin{aligned} f(t) &= b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt) \right) \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$ kallas då för en *sinusserieutveckling* av $f(t)$.

Fourierserieutveckling

Mer allmänt: en utveckling

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

kallas en *Fourierserie* för $f(t)$. (Efter Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830.)

Konstanterna a_n och b_n kallas *Fourierkoefficienter*.

Fourierserieutveckling

Vi kommer att **anta** att en funktion $f(t)$ på $0 \leq t \leq \pi$ kan sinusserieutvecklas:

Fourierserieutveckling

Vi kommer att **anta** att en funktion $f(t)$ på $0 \leq t \leq \pi$ kan sinusserieutvecklas:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Fourierserieutveckling

Vi kommer att **anta** att en funktion $f(t)$ på $0 \leq t \leq \pi$ kan sinusserieutvecklas:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Detta gäller för väldigt många funktioner, men **inte för alla**.

Fourierserieutveckling

Vi kommer att **anta** att en funktion $f(t)$ på $0 \leq t \leq \pi$ kan sinusserieutvecklas:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Detta gäller för väldigt många funktioner, men **inte för alla**. (Komplicerat...)

Fourierserieutveckling

Vi kommer att **anta** att en funktion $f(t)$ på $0 \leq t \leq \pi$ kan sinusserieutvecklas:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$$

Detta gäller för väldigt många funktioner, men **inte för alla**. (Komplicerat...)

Men hur beräknar vi koefficienterna b_n?

Fourierserieutveckling

Låt m vara ett positivt heltal.

Fourierserieutveckling

Låt m vara ett positivt heltal.

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt =$$

Fourierserieutveckling

Låt m vara ett positivt heltal.

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)\right)\sin(mt)dt$$

Fourierserieutveckling

Låt m vara ett positivt heltal.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt &= \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)\right)\sin(mt)dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt\end{aligned}$$

Fourierserieutveckling

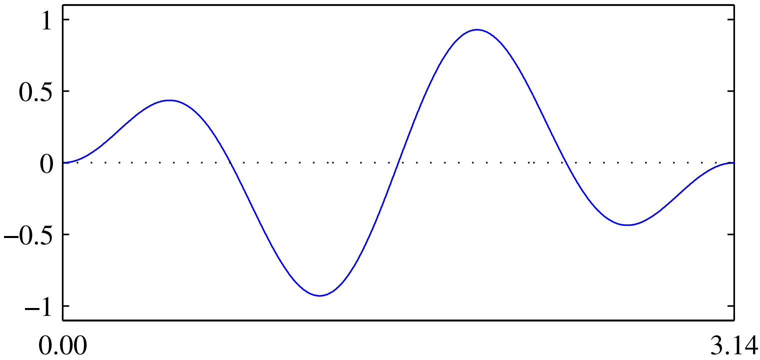
Låt m vara ett positivt heltal.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin(mt)dt &= \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nt)\right)\sin(mt)dt \\ &= \sum_{n=1}^\infty b_n \int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt\end{aligned}$$

Behöver alltså beräkna $\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt$.

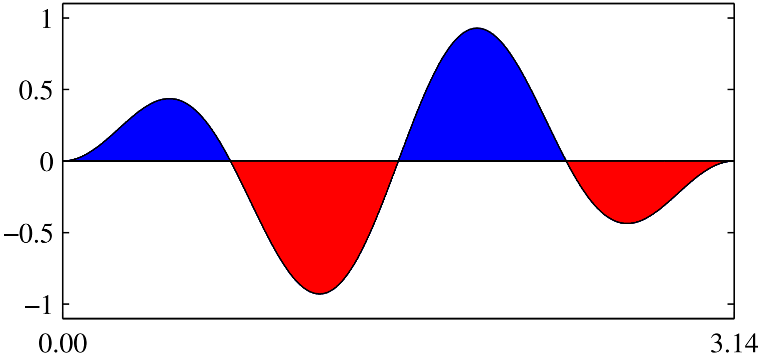
Fourierserieutveckling

Exempel: $sin(t)sin(4t)$ på $0 \leq t \leq \pi$:



Fourierserieutveckling

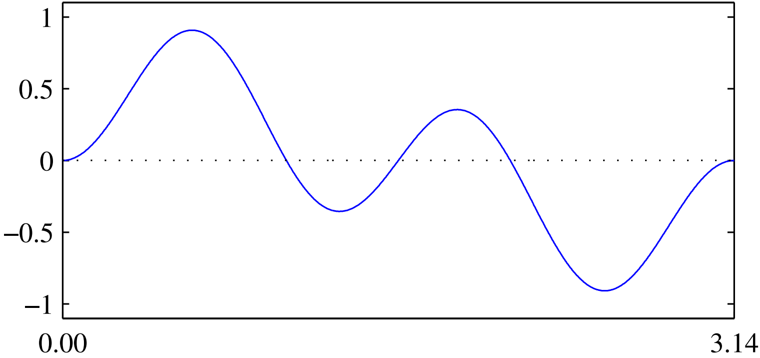
Exempel: $sin(t)sin(4t)$ på $0 \leq t \leq \pi$:



Ser att $\int_0^\pi \sin(t)\sin(4t)dt = 0$.

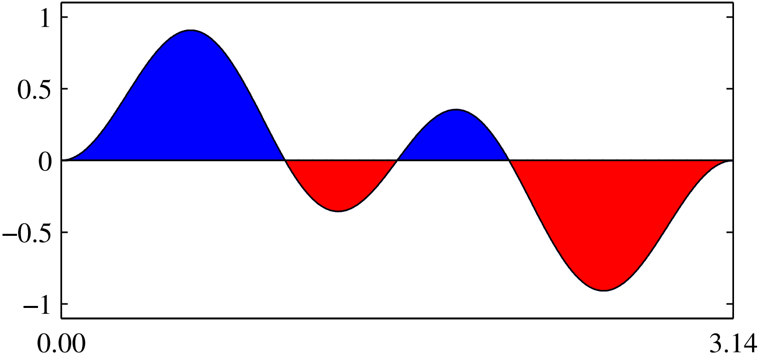
Fourierserieutveckling

Exempel: $sin(2t)sin(3t)$ på $0 \leq t \leq \pi$:



Fourierserieutveckling

Exempel: $sin(2t)sin(3t)$ på $0 \leq t \leq \pi$:



Ser återigen att $\int_0^\pi \sin(2t)\sin(3t)dt = 0$.

Fourierserieutveckling

Allmänt: man kan visa att $\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$ *alltid* gäller om de positiva heltalen n och m är **olika**.

Fourierserieutveckling

Allmänt: man kan visa att $\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$ *alltid* gäller om de positiva heltalen n och m är **olika**.

Om n och m istället är **lika**:

Fourierserieutveckling

Allmänt: man kan visa att $\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$ *alltid* gäller om de positiva heltalen n och m är **olika**.

Om n och m istället är **lika**:

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(nt)dt$$

Fourierserieutveckling

Allmänt: man kan visa att $\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$ *alltid* gäller om de positiva heltalen n och m är **olika**.

Om n och m istället är **lika**:

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(nt)dt = \int_0^\pi \sin^2(nt)dt$$

Fourierserieutveckling

Allmänt: man kan visa att $\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$ *alltid* gäller om de positiva heltalen n och m är **olika**.

Om n och m istället är **lika**:

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(nt)dt = \int_0^\pi \sin^2(nt)dt = (...)$$

Fourierserieutveckling

Allmänt: man kan visa att $\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = 0$ *alltid* gäller om de positiva heltalen n och m är **olika**.

Om n och m istället är **lika**:

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(nt)dt = \int_0^\pi \sin^2(nt)dt = (\ldots) = \frac{\pi}{2}.$$

Fourierserieutveckling

Alltså:

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

vilket ger

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

vilket ger

$$\int_0^\pi f(t)\sin(mt)dt$$

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

vilket ger

$$\int_0^\pi f(t)\sin(mt)dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^\pi \sin(nt)\sin(mt)dt$$

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

vilket ger

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = b_m \cdot \frac{\pi}{2}$$

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

vilket ger

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = b_m \cdot \frac{\pi}{2}$$

Fourierserieutveckling

Alltså:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } n = m, \end{cases}$$

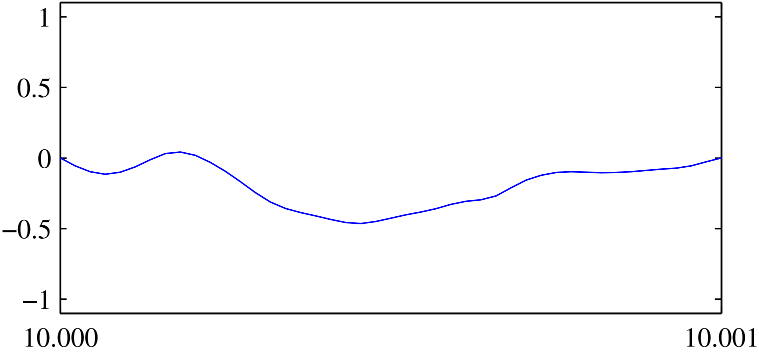
vilket ger

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = b_m \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(mt)dt.$$

Beräkning av fourierkoefficienter

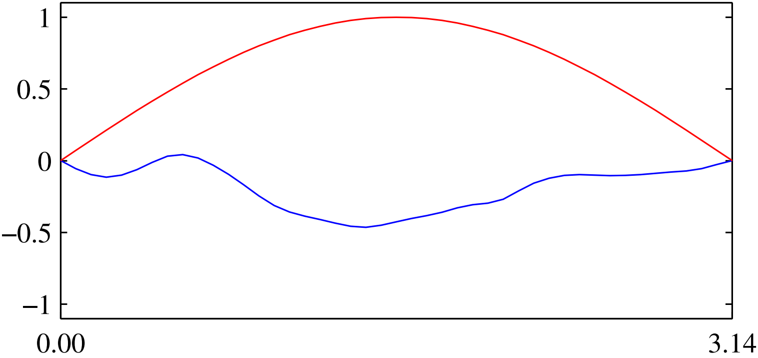
Åter till exemplet vid start:



Vi vill beräkna b_1.

Beräkning av fourierkoefficienter

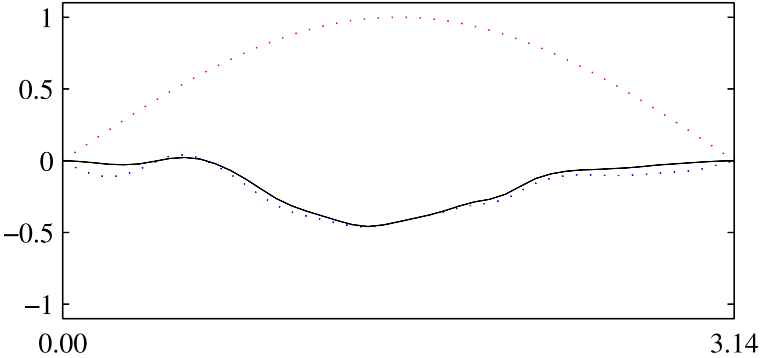
Vi justerar tidsaxeln för beräkning



och integrerar produkten av $f(t)$ med $\sin(t)$ över hela intervallet.

Beräkning av fourierkoefficienter

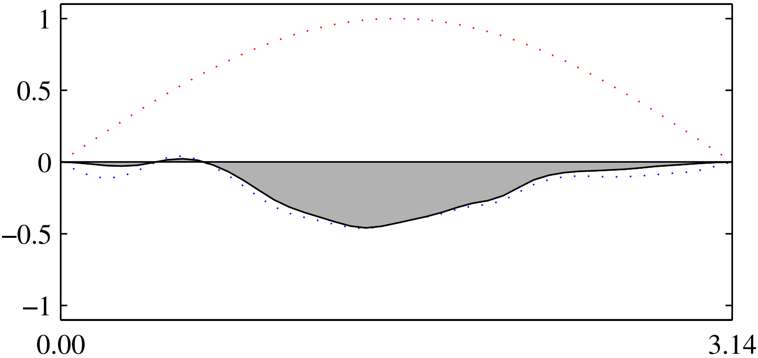
Vi justerar tidsaxeln för beräkning



och integrerar produkten av $f(t)$ med $\sin(t)$ över hela intervallet.

Beräkning av fourierkoefficienter

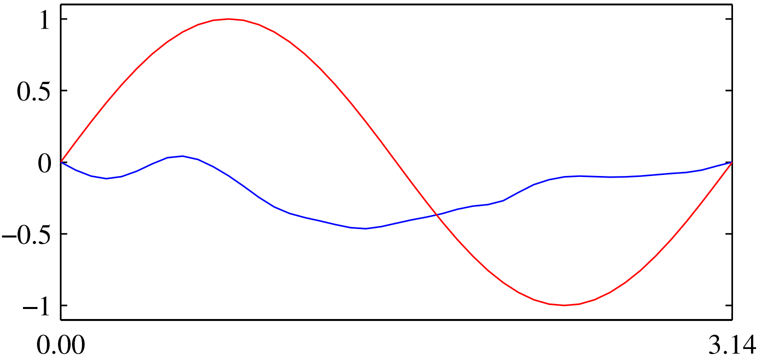
Vi justerar tidsaxeln för beräkning:



$\Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(t) dt \approx -0.3120$

Beräkning av fourierkoefficienter

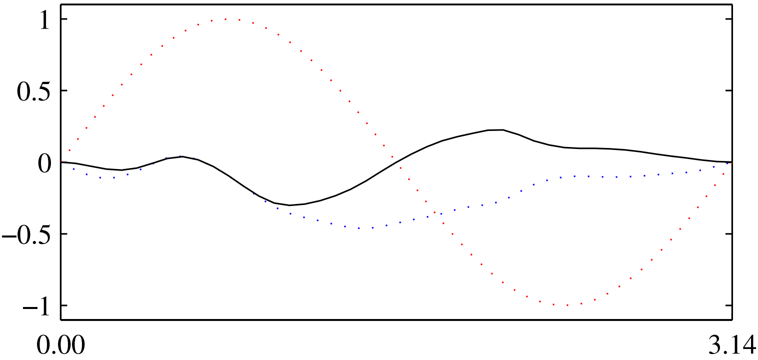
Motsvarande för att beräkna b_2:



Integrerar produkten av $f(t)$ med $\sin(2t)$ över hela intervallet.

Beräkning av fourierkoefficienter

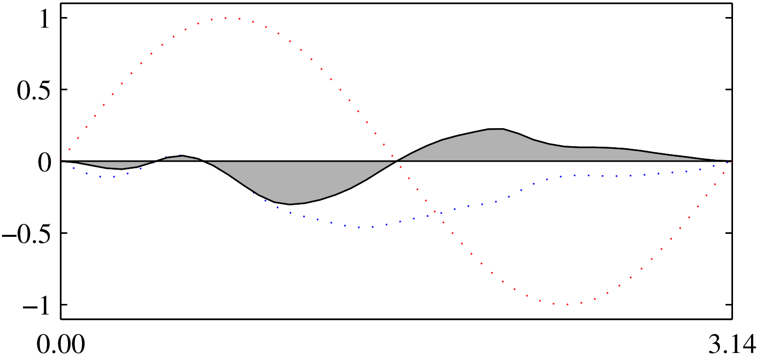
Motsvarande för att beräkna b_2:



Integrerar produkten av $f(t)$ med $\sin(2t)$ över hela intervallet.

Beräkning av fourierkoefficienter

Motsvarande för att beräkna b_2:



$\Rightarrow b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(2t)dt \approx -0.0042$

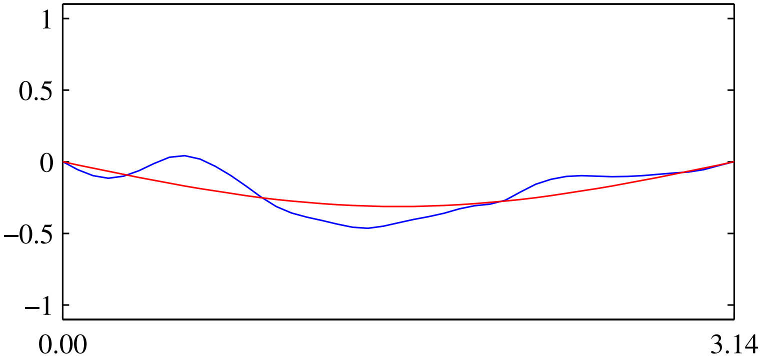
Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc.

Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc. Jämför nu $f(t)$ och

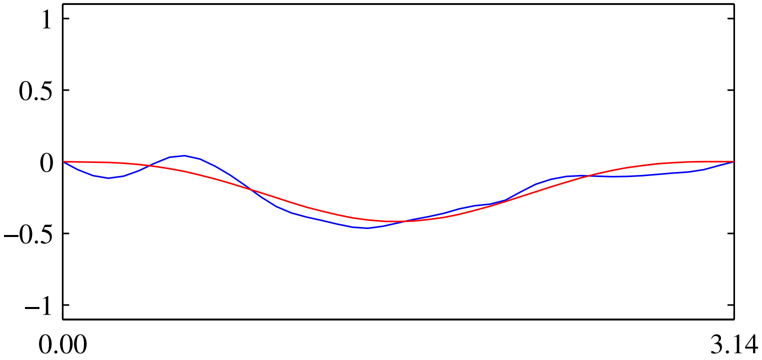
$$\sum_{n=1}^{1} b_n \sin(nt) \approx -0.3120 \cdot sin(t)$$



Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc. Jämför nu $f(t)$ och

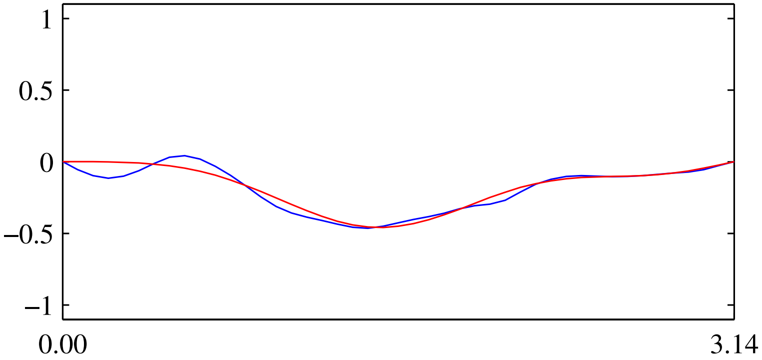
$$\sum_{n=1}^{3} b_n \sin(nt) \approx -0.3120 \cdot \sin(t) - 0.0042 \cdot \sin(2t) + 0.1053 \cdot \sin(3t)$$



Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc. Jämför nu $f(t)$ och

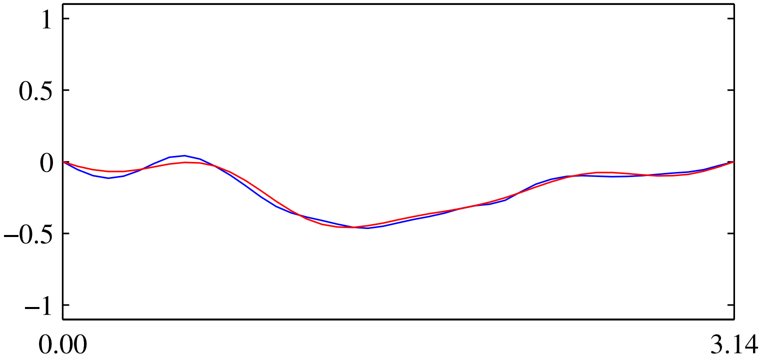
$$\sum_{n=1}^{5} b_n \sin(nt)$$



Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc. Jämför nu $f(t)$ och

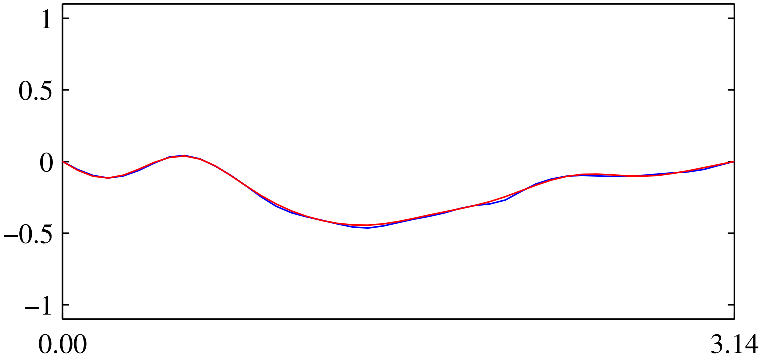
$$\sum_{n=1}^{7} b_n \sin(nt)$$



Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc. Jämför nu $f(t)$ och

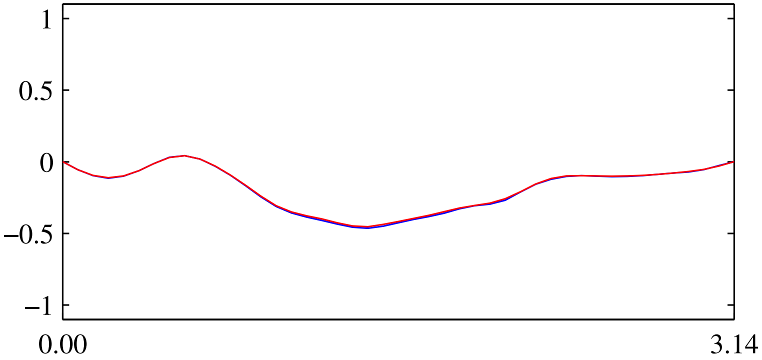
$$\sum_{n=1}^{10} b_n \sin(nt)$$



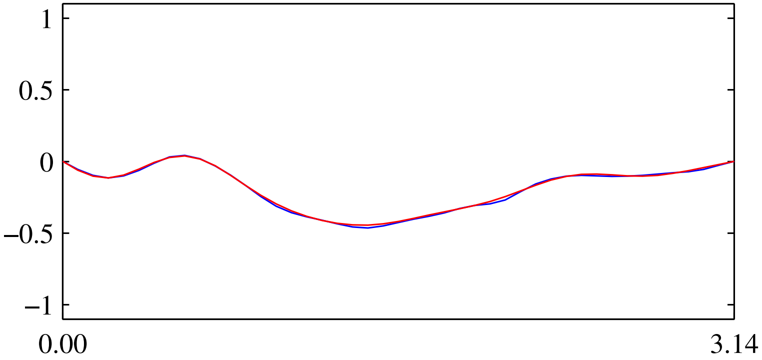
Beräkning av fourierkoefficienter

Fortsätter på detta vis för att även få $b_3 \approx 0.1053$, $b_4 \approx 0.0436$, $b_5 \approx -0.0331$ etc. Jämför nu $f(t)$ och

$$\sum_{n=1}^{20} b_n \sin(nt)$$

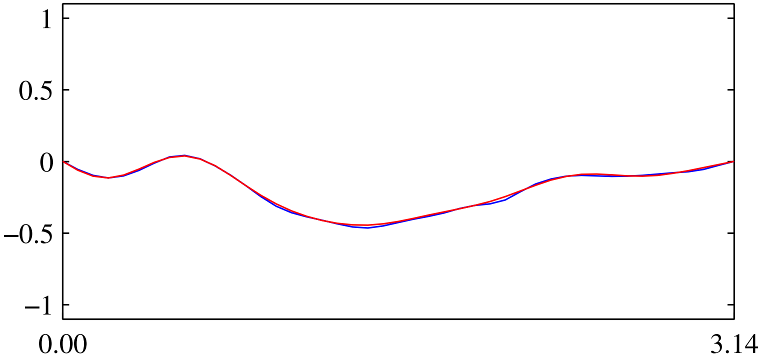


Slutsats



Vi tycks ha funnit ett sätt att gå från 44 st datapunkter till **10 st** parametrar $(b_1, b_2, \ldots, b_{10})$ per ms, samtidigt som signalen tycks behålla ungefär samma form.

Slutsats



Vi tycks ha funnit ett sätt att gå från 44 st datapunkter till **10 st** parametrar $(b_1, b_2, \ldots, b_{10})$ per ms, samtidigt som signalen tycks behålla ungefär samma form. ($\approx$ 75% mindre filstorlek!)