Stockholms Matematiska Cirkel

Geometriska konstruktioner

Lisa Nicklasson
Gustav Zickert

Institutionen för matematik KTH och
Matematiska institutionen Stockholms universitet
2017–2018

Innehåll

Några ord på vägen

Detta kompendium är skrivet för att användas som kurslitteratur till Stockholms Matematiska Cirkel under läsåret 2017–2018 och består av sju kapitel.

Kompendiet är inte tänkt att läsas enbart på egen hand, utan ska ses som ett skriftligt komplement till undervisningen på de sju föreläsningarna. En bra idé kan vara att försöka läsa varje kapitel själv innan föreläsningen, så att man redan innan vet vad målet med föreläsningen är och vad som kan visa sig vara svårt.

Som den mesta matematik på högre nivå är kompendiet kompakt skrivet. Detta innebär att man i allmänhet inte kan läsa det som en vanlig bok. Istället bör man pröva nya satser och definitioner genom att på egen hand exemplifiera. Därmed uppnår man oftast en mycket bättre förståelse av vad dessa satser och deras bevis går ut på.

Till varje kapitel finns ett antal övningsuppgifter. Dessa är ordnade efter ungefärlig svårighetsgrad: övningar kan ha en ($\star$), två ($\star\star$) eller tre ($\star\star\star$) stjärnor. Dessutom har de udda övningarna facit längst bak i kompendiet. Syftet med dessa är att eleverna ska kunna lösa dem och på egen hand kontrollera att de förstått materialet. Övningar med jämna nummer saknar facit och kan användas som examination. Det rekommenderas dock att man försöker lösa dessa uppgifter även om man inte examineras på dem. Om man kör fast kan man alltid fråga en kompis, en lärare på sin skola eller någon av författarna. Under årets gång kommer det att finnas räknestugor där eleverna kan lösa uppgifter tillsammans, och få hjälp av oss.

Vi vill dock betona att få av uppgifterna är helt enkla. Detta betyder att läsaren inte bör titta i facit efter några få minuter, utan att först prata med kompisar om uppgiften, kanske lägga den åt sidan ett tag och tänka på annat, och sedan försöka lite till. Dessutom innebär det att få av eleverna kommer att kunna klara samtliga uppgifter, så ett krav på att eleven ska ha löst alla uppgifter bör inte ingå i examinationen. Dock rekommenderar vi starkt att alla elever åtminstone tittar på och försöker sig på alla övningar.

De flesta övningar kommer att ha många olika möjliga lösningar och det som står i facit bör endast ses som ett förslag.

Vi tackar Mats Boij, Institutionen för Matematik vid KTH, Christian Gottlieb och Rune Suhr, båda vid Matematiska institutionen på Stockholms universitet samt Gustav Sædén Ståhl för givande kommentarer om denna skrift.

Några ord om Cirkeln

Stockholms Matematiska Cirkel, i dagligt tal benämnd Cirkeln, är en kurs som kommer från ett nytt samarbete mellan Kungliga Tekniska Högskolan och Stockholms Universitet. Cirkeln har tidigare funnits under KTH:s ensamma regi med namnet KTH:s Matematiska Cirkel. Upplägget kommer dock fortsätta som tidigare år.

Matematiska Cirkeln startade 1999. Dess ambition är att sprida kunskap om matematiken och dess användningsområden utöver vad eleverna får genom gymnasiekurser, och att etablera ett närmare samarbete mellan gymnasieskolan och högskolan. Cirkeln skall särskilt stimulera elevernas matematikintresse och inspirera dem till fortsatta naturvetenskapliga och matematiska studier. Lärarna på Cirkeln kan vid behov ge eleverna förslag på ämnen till projektarbeten vid gymnasiet eller förslag till annan förkovran inom matematik.

Till varje kurs skrivs ett kompendium som distribueras gratis till eleverna. Detta material, föreläsningsschema och övriga uppgifter om Stockholms Matematiska Cirkel finns tillgängligt på

`www.math-stockholm.se/cirkel`

Cirkeln godkänns ofta som en gymnasiekurs eller som matematisk breddning på gymnasieskolorna. Det är upp till varje skola att godkänna Cirkeln som en kurs och det är lärarna från varje skola som sätter betyg på kursen. Lärarna är självklart också välkomna till Cirkeln och många har kommit överens med sin egen skola om att få Cirkeln godkänd som fortbildning eller som undervisning.

Vi vill gärna understryka att föreläsningarna är öppna för alla gymnasieelever, lärare eller andra matematikintresserade.

Vi har avsiktligt valt materialet för att ge eleverna en inblick i matematisk teori och tankesätt och presenterar därför både några huvudsatser inom varje område och bevisen för dessa resultat. Vi har också som målsättning att bevisa alla satser som används om de inte kan förutsättas bekanta av elever från gymnasiet. Detta, och att flera ämnen är på universitetsnivå, gör att lärarna och eleverna kan uppleva programmet som tungt, och alltför långt över gymnasienivån. Meningen är emellertid inte att lärarna och eleverna skall behärska ämnet fullt ut och att lära in det på samma sätt som gymnasiekurserna. Det viktigaste är att eleverna kommer i kontakt med teoretisk matematik och får en inblick i *matematikens väsen*. Vår förhoppning är att lärarna med denna utgångspunkt skall ha lättare att upplysa intresserade elever om Stockholms Matematiska Cirkel och övertyga skolledarna om vikten av att låta både elever och lärare delta i programmet.

Några ord om betygssättning

Ett speciellt problem tidigare år har varit betygssättningen. Detta borde emellertid bara vara ett problem om lärarna använder sig av samma standard som de gör när de sätter betyg på ordinarie gymnasiekurser. Om utgångspunkten istället är att eleverna skall få insikt i matematiken genom att gå på föreläsningarna och att eleven gör sitt bästa för att förstå materialet och lösa uppgifterna, blir betygsättningen lättare. Självklart betyder det mycket vad eleverna har lärt av materialet i kursen, men lärarna kan bara förvänta sig att ett fåtal elever behärskar ämnet fullt ut.

Författarna, sommaren 2017

1 Vad är matematik, egentligen?

Syftet med det här första kapitlet är att redogöra för vad vi menar med matematik. Själva kärnan av matematiken, som vetenskap, är vad vi kallar för *matematiska bevis*. Ett bevis är ett logiskt resonemang, som förklarar varför ett visst påstående är sant. Innan vi går in djupare på detta ska vi gå igenom ett av de mest grundläggande begreppen inom matematik, nämligen *mängder*.

1.1 Mängder

En *mängd* är en samling objekt, som vi brukar kalla *element*. Elementen kan vara tal eller bokstäver, men också andra saker. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att helt enkelt räkna upp dess element. Detta gör vi genom att skriva hela listan av element, och omge dessa av parenteser av typen $\{\}$. Till exempel är

$$\left\{1, 2, 78, y, \frac{1}{3}\right\}$$

mängden som består av elementen $1, 2, 78, y$ och $\frac{1}{3}$. Det spelar ingen roll i vilken ordning elementen räknas upp. Vi tar heller inte hänsyn till om ett och samma element räknas upp flera gånger. Till exempel betraktas

$$\{2, 4, 4, 3, 4\},\ \{2, 3, 4, 4, 4\} \text{ och } \{2, 3, 4\}$$

som samma mängd, alltså mängden av de tre elementen $2, 3$ och 4. De två exempel vi nu sett har båda varit ändliga mängder, men mängder kan även vara oändliga. En oändlig mängd kan förstås inte beskrivas genom att vi räknar upp alla elementen, utan vi behöver i stället beskriva elementen. Ibland räcker det att beskriva mängden med ord, och ge den en beteckning. En mängd som vi ofta återkommer till inom matematiken är mängden av alla heltal, och denna har därför fått beteckningen $\mathbb{Z}$. Valet av bokstaven Z kommer från det tyska ordet *Zahl*, som betyder tal. Vissa oändliga mängder kan beskrivas som talföljder. Till exempel kan mängden av alla positiva udda tal skrivas som

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}.$$

De tre punkterna betyder alltså att vi fortsätter att räkna upp talen enligt samma mönster, i all oändlighet.

En mängd som inte innehåller några element alls kallas för *den tomma mängden*, och betecknas $\emptyset$.

Definition 1.1.1. Låt A och B vara mängder. Om alla element i B också finns i A sägs B vara en *delmängd* av A. Detta betecknas $B \subseteq A$.

Till exempel har vi

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}.$$

Om vi vill poängtera att ett visst element x tillhör en mängd A skriver vi $x \in A$, som utläses "x tillhör A". Till exempel har vi $5 \in \mathbb{Z}$. Ett ytterligare sätt att beskriva en mängd är att beskriva den som en delmängd av en känd mängd, men med något extra villkor på elementen. Mängden av element i en mängd M som uppfyller ett visst villkor skrivs

$$\{x \in M \mid \text{villkor på } x\}.$$

Till exempel kan vi låta

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}.$$

Detta betyder att vi låter A vara mängden av heltal som är mindre än 0, det vill säga de negativa heltalen. Vi kan fortsätta, och låta

$$B = \{x \in A \mid x \text{ är jämn}\}.$$

Mängden B är alltså mängden av alla jämna tal i mängden A, det vill säga alla jämna negativa tal.

Istället för att till vänster ange en mängd våra element ska tillhöra, kan vi ange på vilken form elementen ska vara. Vi har redan nämnt begreppen *udda* och *jämna tal*, vilka läsaren förstås är bekant med. Rent formellt definieras de jämna talen som de tal vilka kan skrivas på formen $2x$, där x är ett heltal. På liknande sätt definieras de udda talen som de tal vilka kan skrivas på formen $2x + 1$, där x är ett heltal. Vi kan då beskriva mängden av jämna tal som

$$\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\},$$

och mängden av udda tal som

$$\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Ett sista exempel är

$$\left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, \text{ och } b \neq 0 \right\},$$

som betecknar mängden av alla kvoter av heltal, där nämnaren inte tillåts vara 0. Denna mängd kallas för de *rationella talen* och betecknas vanligtvis $\mathbb{Q}$. Valet av bokstaven Q kommer från italienskans *quoziente*, som betyder kvot. De rationella talen utgör en delmängd av de *reella talen*, som brukar betecknas $\mathbb{R}$. Mer om de reella talen finns att läsa i föregående års cirkelkompendium.

1.2 Matematisk bevisföring

Denna kurs kommer i huvudsak att handla om att *bevisa* matematiska påståenden, vilket kan vara en omställning från tidigare kurser i matematik. Därför kan det vara på sin plats att förklara vad ett bevis är för något. Till att börja med måste vi vara klara över vad som menas med ett *påstående*. Ett påstående är något som antingen är sant eller falskt. Nedan följer fyra exempel på påståenden

(i) $2 + 3 = 5$,

(ii) $\{a, b, c\} = \{a, b, c, b, c\}$,

(iii) $\pi \in \mathbb{Z}$,

(iv) Vinkelsumman hos en triangel är $180°$.

Vi kan se att de första, andra och fjärde påståendena är sanna. Talet π är som bekant inte ett heltal, så det tredje påståendet är falskt. Följande uttryck

- $1 + 1$
- $\{a, b, c\}$

är *inte* påståenden; de är varken sanna eller falska. Ett *bevis* av att ett påstående är sant är en följd av logiska slutledningar som, utifrån givna förutsättningar, leder fram till slutsatsen att påståendet är sant. Förenklat kan man säga att ett bevis är en förklaring av varför påståendet är sant.

Man kan ha många olika anledningar att tro att ett påstående är sant. Det kan till exempel vara att någon trovärdig person sagt att påståendet är sant, eller att vi tittat på många exempel och inte kunnat hitta något motexempel. Detta är dock inte samma sak som att ha ett bevis för att påståendet är sant. Säg till exempel att vi tittat på 100 olika trianglar, och beräknat vinkelsumman hos alla dessa med hjälp av en gradskiva. Det visade sig i alla fallen att vinkelsumman var $180°$, och hur mycket vi än försöker kan vi inte konstruera en triangel med en annan vinkelsumma. Det verkar alltså troligt att vinkelsumman hos en triangel alltid är $180°$. Detta är dock inte ett bevis, av två anledningar. Dels kan vi inte mäta helt exakt med vår gradskiva, men framför allt gäller argumentet bara just de trianglar vi tittat på, inte *alla* trianglar. Det är förstås sant att vinkelsumman i en triangel alltid är $180°$, och vi ska strax gå igenom ett bevis av detta påstående. Ett sant påstående, för vilket det finns ett bevis, brukar inom matematiken kallas för en *sats*. Innan vi bevisar satsen om triangelns vinkelsumma behöver vi några grundläggande samband som används i beviset. Sådana samband brukar kallas för *hjälpsatser*.

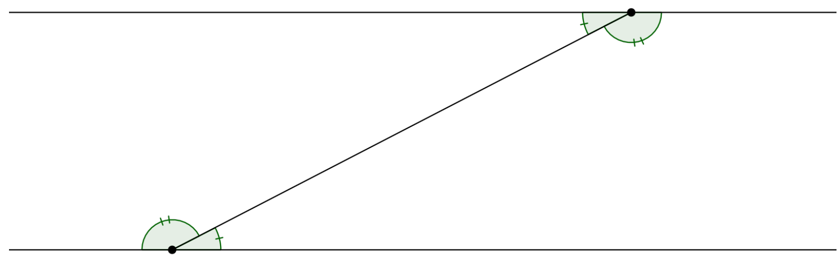
Hjälpsats 1.2.1. *Låt säga att vi har två parallella linjer, med en punkt markerad på vardera linje. Vi ritar ut sträckan mellan de två punkterna. De två spetsiga alternatvinklarna som uppstår är då lika, och så även de två trubbiga alternatvinklarna. Sambandet illustreras i Figur 1.1.*

Följande notation kommer att användas i detta kompendium. Sträckan mellan två punkter a och b betecknas ab. Vi låter också abc beteckna vinkeln som fås från tre punkter a, b och c, på det sätt som beskrivs i Figur 1.2.

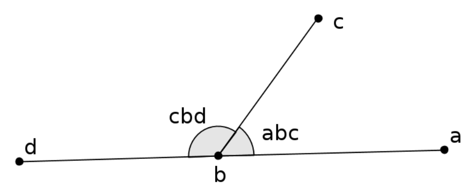
Ett annat grundläggande samband som är nödvändigt får vårt bevis är följande.

Hjälpsats 1.2.2. *Antag att vi har två vinklar abc och cbd sådana att punkterna a, b och d ligger på en linje, som i Figur 1.2. Då är summan av vinklarna* $180°$.

De båda hjälpsatserna bevisas i Euklides bokserie *Elementa*, om vilken det kommer att handla mer om i avsnitt 1.3, samt i Kapitel 2. Vi är nu redo



Figur 1.1: Alternatvinklar vid parallella linjer



Figur 1.2

att genomföra beviset av att triangelns vinkelsumma är lika med $180°$, med användning av de två hjälpsatserna. Beviset illustreras i Figur 1.3. Observera dock att beviset inte bara gäller just triangeln i figuren, utan fungerar för vilken triangel som helst. Låt oss ta en godtycklig[1] triangel, och kalla dess hörn a, b och c. Vi förlänger sträckan ab, och tänker oss en parallell linje genom punkten c. Om vi nu betraktar de två parallella linjerna, tillsammans med sträckan ac, kan vi markera alternatvinkeln till cab, som är av samma storlek. På samma sätt kan vi göra för vinkeln abc. Vi ser nu att summan av vinklarna är $180°$, vilket vi ville bevisa.

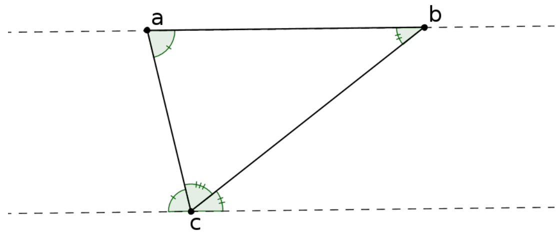
Nu har vi alltså bevisat följande sats.

Sats 1.2.3. *Vinkelsumman hos en triangel är* $180°$.

Vi avslutar med ytterligare ett exempel på en sats, med tillhörande bevis. Beviset är ett så kallat *motsägelsebevis*, vilket går ut på att vi bevisar påståendet genom att bevisa att dess motsats är falsk. Sådana bevis börjar med att vi antar att påståendets motsats gäller. Därefter resonerar vi vidare utifrån detta antagande, och kommer tillslut fram till en motsägelse, alltså något som är uppenbart falskt. Vi kan då dra slutsatsen att påståendets motsats alltså inte kan gälla.

Sats 1.2.4. *Talet* $\sqrt{2}$ *är inte rationellt.*

[1] Ordet ”godtycklig” används ofta i matematiska bevis. Med en ”godtycklig triangel”, menar vi en triangel som vi inte tillskriver några speciella egenskaper. Syftet är att poängtera att beviset fungerar oavsett vilken triangel vi än väljer.



Figur 1.3: Illustration av beviset av triangelns vinkelsumma

Innan vi bevisar satsen kan det vara bra att ha en tydlig definition av vad $\sqrt{2}$ egentligen är för något.

Definition 1.2.5. Låt a vara ett positivt reellt tal. Vi definierar nu $\sqrt{a}$ som den positiva lösningen till ekvationen $x^2 = a$.

Notera alltså att till exempel $\sqrt{4}$ är lika med 2, och inte -2. Ekvationen $x^2 = 4$ har däremot de två lösningarna 2 och -2. På samma sätt har ekvationen $x^2 = 2$ den positiva lösningen $\sqrt{2}$ och den negativa lösningen $-\sqrt{2}$. Vi kan nu gå vidare och bevisa Sats 1.2.4.

Bevis. Om $\sqrt{2}$ vore rationell skulle vi ha $\sqrt{2} = a/b$, för heltal a och b. Låt oss därför anta att $\sqrt{2} = a/b$, för att se att detta leder fram till en motsägelse. Vi kan anta att a/b är ett maximalt förkortat bråk. Vi har

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2, \text{ vilket vi också kan skriva som } a^2 = 2b^2.$$

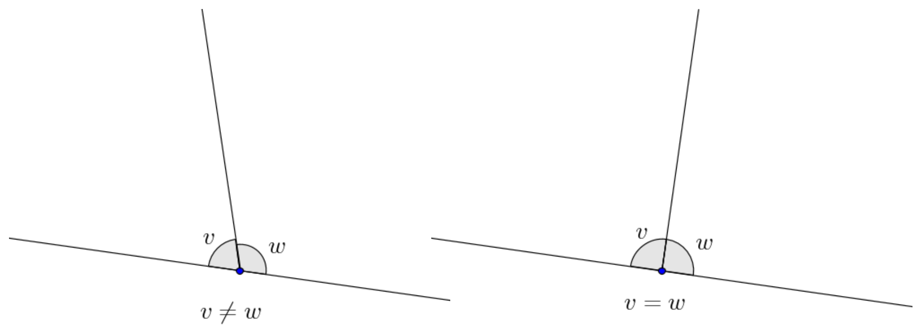
Talet $2b^2$ är ett jämnt heltal, så även a^2 måste vara jämnt. Eftersom kvadraten av ett udda tal är udda, medans kvadraten av ett jämnt tal är jämnt (se Övning 1.4), måste a i det här fallet vara jämnt. Det betyder att $a = 2c$, där c är ett heltal. Vi har nu $2^2c^2 = 2b^2$, och det följer att $2c^2 = b^2$. Enligt samma resonemang som tidigare för a, följer nu att även b är ett jämnt tal, och vi kan skriva $b = 2d$ för något heltal d. Nu har vi

$$\frac{a}{b} = \frac{2c}{2d}.$$

Detta bråk kan förkortas med 2, vilket ju motsäger att a/b skulle vara ett maximalt förkortat bråk. Vårt resonemang, som grundade sig i att $\sqrt{2}$ skulle vara ett rationellt tal har alltså lett fram till en motsägelse. Vi kan nu dra slutsatsen att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal. □

1.3 Euklides fem axiom

När vi bevisade att triangelns vinkelsumma är 180° använde vi oss av två hjälpsatser. För att bevisa en sats behöver vi alltid några förutsättningar att



Figur 1.4: Om de två vinklarna är lika har vi en rät vinkel.

utgå ifrån. Det kan vara definitioner, eller saker vi känner till sedan tidigare. De mest grundläggande förutsättningarna brukar kallas för *axiom*. Axiomen i sig bevisas inte, men dessa är också de enda påståenden som får användas utan bevis. Den första kända matematiska skrift som är uppbyggd enligt denna princip är bokserien *Elementa*, som skrevs av den grekiske matematikern Euklides ca år 300 f.Kr.. De, totalt 13, böckerna i Elementa är en sammanfattning av studierna inom geometri, och även andra grenar av matematiken, i antikens Grekland. Bokserien har haft oerhört stor betydelse för matematikens utveckling. Den första boken börjar med att grundläggande begrepp, såsom *punkt*, *linje*, *rät vinkel*, och *cirkel*, definieras. Totalt ges 23 definitioner, och vi återger två av dem här.

Definition 1.3.1. Givet en linje, samt en annan linje som utgår från en punkt på den första linjen, bildas två vinklar. Om de båda vinklarna som uppstår är lika kallas detta en *rät vinkel*. Se Figur 1.4.

Definition 1.3.2. Två räta linjer sägs vara *parallella* om de aldrig skär varandra, hur långa vi än drar dem.

Efter definitionerna följer fem axiom, eller postulat, som Euklides kallade dem. De kan formuleras på följande sätt.

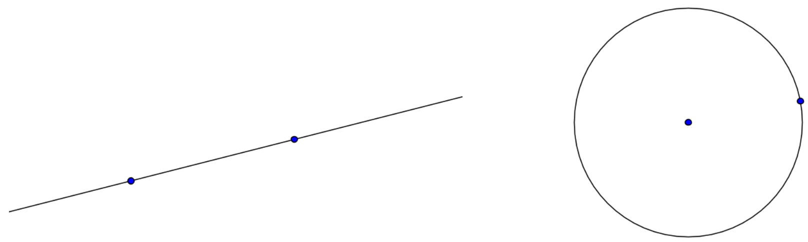
(i) Givet två punkter kan vi dra en sträcka från den ena punkten till den andra.

(ii) Varje given sträcka kan förlängas till en längre sträcka av godtycklig längd.

(iii) Givet två punkter kan vi rita en cirkel med centrum i den ena punkten och som går genom den andra punkten.

(iv) Alla räta vinklar är lika.

(v) Givet en linje och en punkt, finns högst en linje parallell med den första, som går genom den givna punkten.



Figur 1.5: Linjalen drar en rät linje genom två givna punkter. Passaren ritar ut en cirkel som går genom en given punkt, och har sitt centrum i en annan given punkt.

Med en ”sträcka” ovan avses en rät linje från en punkt till en annan.

Dessa axiom är alltså påståenden som accepteras utan bevis. Alla satser bevisas sedan genom att använda axiomen, eller genom att använda satser som redan bevisats. I praktiken betyder det alltså att alla satser bygger på enbart de fem axiomen.

Euklides fem axiom är av något olika karaktär. De tre första beskriver tillåtna konstruktioner. Givet två punkter får vi alltså rita ut sträckor och cirklar, på det sätt som beskrivs ovan. Detta har senare kommit att tolkas som att vi har de två verktygen *passare* och *linjal*. Vi förtydligar exakt hur det är tänkt att passaren och linjalen ska fungera, i det här sammanhanget. Se även Figur 1.5

- Givet två punkter kan vi, med hjälp av *linjalen*, dra en rät linje av valfri längd och som går genom de två punkterna.
- Givet två punkter kan vi, med hjälp av *passaren*, rita en cirkel med centrum i den ena punkten och som går genom den andra punkten. Vi placerar alltså passarens nål i den punkt som ska vara mittpunkten, och pennan i den andra punkten.
- Vi kan markera skärningspunkter mellan de linjer och cirklar vi ritat, och använda dessa punkter för att rita nya linjer och cirklar.

Observera att passaren och linjalen enbart får användas på det sätt som beskrivs ovan. Linjalen ska alltså betraktas som ett verktyg för att dra raka linjer, *inte* som ett verktyg för att mäta sträckor. Vi kan tänka oss att linjalen inte har några markeringar.

De fjärde och femte axiomen ger oss inga nya verktyg att arbeta med, utan är antaganden som är nödvändiga i kommande bevis. Det fjärde axiomet kan tyckas onödigt, men det följer faktiskt inte av Definition 1.3.1 att alla räta vinklar verkligen är lika. Det femte axiomet, som brukar kallas *parallellaxiomet*, formulerades ursprungligen något annorlunda. Vi har valt denna formulering eftersom den är enklare att förstå. Det har bevisats att de båda formuleringarna av axiomet är likvärdiga. Notera att axiomet, så som vi formulerat det här, säger att det finns *högst en* parallell linje som går genom den givna punkten.

Det framgår alltså inte om det verkligen finns en sådan linje, bara att det inte kan finnas flera olika. Det var länge ifrågasatt om det femte axiomet verkligen borde vara ett axiom, eller om det egentligen kunde bevisas genom att använda de fyra första axiomen, och i så fall snarare skulle vara en sats. Så sent som under 1800-talet bevisades det dock, av den italienske matematikern Eugenio Beltrami, att det femte axiomet faktiskt *inte* kan härledas från de fyra första.

Vad som kan konstrueras, och inte, med passare och linjal har intresserat matematiker i många århundraden. De kommande sex kapitlen i det här kompendiet kommer att handla om just detta.

Vi avslutar kapitlet med anmärkningen att alla geometriska objekt i detta kompendium kommer att ligga i ett plan. Det enda undantaget återfinns i avsnittet om kubens fördubbling i kompendiets sista kapitel.

Övningar

Övning 1.1 ($\star$). Räkna upp elementen i följande mängder.

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$

(ii) $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x + 1 < 6\}$

(iii) $\{2x \mid x \in M\}$

Övning 1.2 ($\star$). Låt $A = \{-13, 5, \frac{\pi}{2}, \frac{11}{3}, 750, 751, 752\}$. Vilka av följande mängder är delmängder till A?

$$
\begin{aligned}
B =& \{5, 751\} \\
C =& \{752, \tfrac{11}{3}, 5\} \\
D =& \{-13, 753\} \\
E =& \{-13\} \\
F =& \{\pi, -13\} \\
G =& \{750 + 5\} \\
H =& \{-13, 5, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{11}{3}, 750, 751, 752\}
\end{aligned}
$$

Övning 1.3 ($\star$). Vilka av följande är påståenden?

(i) Månen är en ost.

(ii) En grön bil.

(iii) $7 \cdot 8 = 56$

(iv) $\sqrt{\dfrac{3 + (x+1)^2}{2}} - 1$

(v) $\{5, 3, 5, 5, 5, 2\} \subseteq \{2, 3, 5\}$

Vilka av påståendena är sanna?

Övning 1.4 ($\star\star$). Bevisa följande.

(i) Summan av ett jämnt heltal och ett udda heltal är udda.

(ii) Produkten av två udda tal är udda.

(iii) Produkten av två jämna tal är jämn.

Övning 1.5 ($\star\star$). Är de två mängderna lika (det vill säga innehåller samma element)? Om de är lika, motivera! Om de inte är lika, ge ett exempel på ett element som finns i den ena mängden, men inte i den andra.

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ och $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = 27\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ och $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 = 81\}$

(iii) $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, och $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(iv) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, och $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ och } x \geq 0\}$

(v) $\{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$, och $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ och } x \geq 0\}$

Övning 1.6 ($\star\star$). Vilka av följande är rationella tal? Motivera!

$$0,\ 1,\ \frac{3}{5},\ \frac{\sqrt{2}}{5},\ \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

Övning 1.7 ($\star\star$). Låt $M = \{x + \sqrt{2}y \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Vilka av följande tal tillhör mängden M? Motivera!

$$0,\ \frac{3}{5} + \frac{1}{7}\sqrt{2},\ \sqrt{2} - 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Övning 1.8 ($\star\star\star$). Varje heltal a kan skrivas som $a = 3k + r$, där k är ett heltal och $r = 0, 1$ eller 2. Talet k kallas för *kvoten*, och r för *resten*, vid heltalsdivision av a med 3. Talet a sägs vara *delbart med* 3 om $r = 0$, alltså när $a = 3k$, för ett heltal k. Bevisa följande.

(i) Om a är delbart med 3 är även a^2 delbart med 3.

(ii) Om a inte är delbart med 3 är inte heller a^2 delbart med 3.

Övning 1.9 ($\star\star\star$). Bevisa att $\sqrt{3}$ inte är ett rationellt tal.

Övning 1.10 ($\star\star$). Använd Sats 1.2.3 för att härleda vinkelsumman av en...

(i) rektangel,

(ii) regelbunden sjuhörning,

(iii) regelbunden n-hörning, där n är ett heltal större än 2.

Anmärkning: Att en n-hörning är regelbunden betyder att alla sidor är lika långa, och alla inre vinklar lika stora. Vinkelsumman för en oregelbunden n-hörning är densamma, men beviset blir något svårare.

2 Konstruktioner med passare och linjal

I det här kapitlet ska vi titta närmare på vilka slags konstruktioner vi kan göra med våra verktyg, passare och linjal, som definierades i Kapitel 1. Vi börjar med rena geometriska konstruktioner, för att sedan gå över till vad vi kallar konstruktion av tal.

2.1 Geometriska konstruktioner

Vi kommer här att gå igenom ett urval av satserna i Elementa, framför allt från den första boken. Eftersom vårt syfte är att förstå vilka slags konstruktioner som är möjliga med passare och linjal har vi valt att bevisa de satser som ger en djupare förståelse för detta. Vi har även valt att ta med flera andra satser som beskriver olika geometriska samband, eftersom att dessa satser används i kompendiet. De flesta är antagligen läsaren bekant med sedan tidigare, även om de ibland formuleras på ett ovant sätt. Dessa satser kommer vi dock inte att bevisa, eftersom att det skulle bli allt för omfattande.

Vi kommer ofta att skriva enbart ”konstruera”, i stället för ”konstruera med passare och linjal”. När vi skriver att en punkt är konstruerbar menar vi att punkten kan konstrueras med hjälp av passare och linjal.

Sats 2.1.1 (Euklides I.1)**.** *Givet två punkter kan vi konstruera en liksidig triangel med två av hörnen i de givna punkterna.*

Bevis. Beviset illustreras i Figur 2.1.

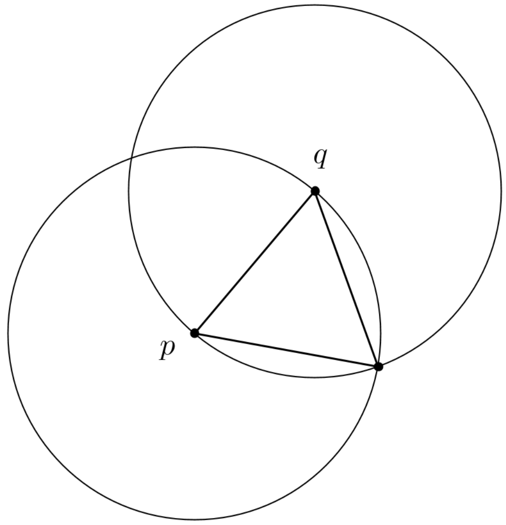
Låt oss kalla punkterna för p och q. Använd först passaren för att rita en cirkel, med p som mittpunkt, och som går genom q. Rita sedan en till cirkel, med q som mittpunkt i stället. Cirklarna skär varandra i två punkter, markera en valfri av dessa. Vi har nu tre punkter, och dessa ska utgöra triangelns hörn. Med hjälp av linjalen ritar vi ut triangelns sidor. De båda cirklarna har samma radie, och per konstruktion har triangelns alla sidor denna radie som längd. Vi har alltså konstruerat en liksidig triangel. □

Sats 2.1.2 (Euklides I.2)**.** *Givet en cirkel och dess mittpunkt kan vi konstruera en cirkel med samma radie och centrum i en given punkt.*

Slarvigt skulle man kunna tänka sig att vi bara lyfter passaren, sätter ner nålen i den givna punkten, och ritar cirkeln. Detta är dock inte tillåtet; det står inte i definitionen att vi får använda passaren på det viset. Vi kan föreställa oss att passaren fälls ihop när vi lyfter den från pappret. Nedan går vi igenom beviset av att vi faktiskt kan ”flytta radien”.

Bevis av Sats 2.1.2. Låt oss kalla cirkelns mittpunkt för m, dess radie för r, och den andra givna punkten för p. Konstruktionen görs i följande steg, som även illustreras i Figur 2.2

(i) Rita en cirkel C_1 med mittpunkt m, som går genom punkten p.



Figur 2.1: Konstruktion av en liksidig triangel

(ii) Rita en cirkel C_2 med mittpunkt p, som går genom m.

(iii) Låt q_1 vara en av skärningspunkterna mellan C_1 och C_2. Notera att q_1 ligger på exakt samma avstånd från m som från p.

(iv) Dra en linje som utgår från q_1 och passerar genom m. Denna skär den ursprungliga cirkeln i en punkt som vi kallar q_2.

(v) Rita en cirkel C_3 med centrum i q_1, som går genom q_2.

(vi) Dra en linje som utgår från q_1 och passerar genom p. Linjen skär C_3 i en punkt som vi kan kalla q_3.

(vii) Kom ihåg att m och p ligger på samma avstånd från q_1. Vi har också att q_2 och q_3 ligger på samma avstånd från q_1. Det följer att avståndet från p till q_3 är detsamma som avståndet från m till q_2, vilket är r. Vi kan nu rita en cirkel med centrum i p och radie r.

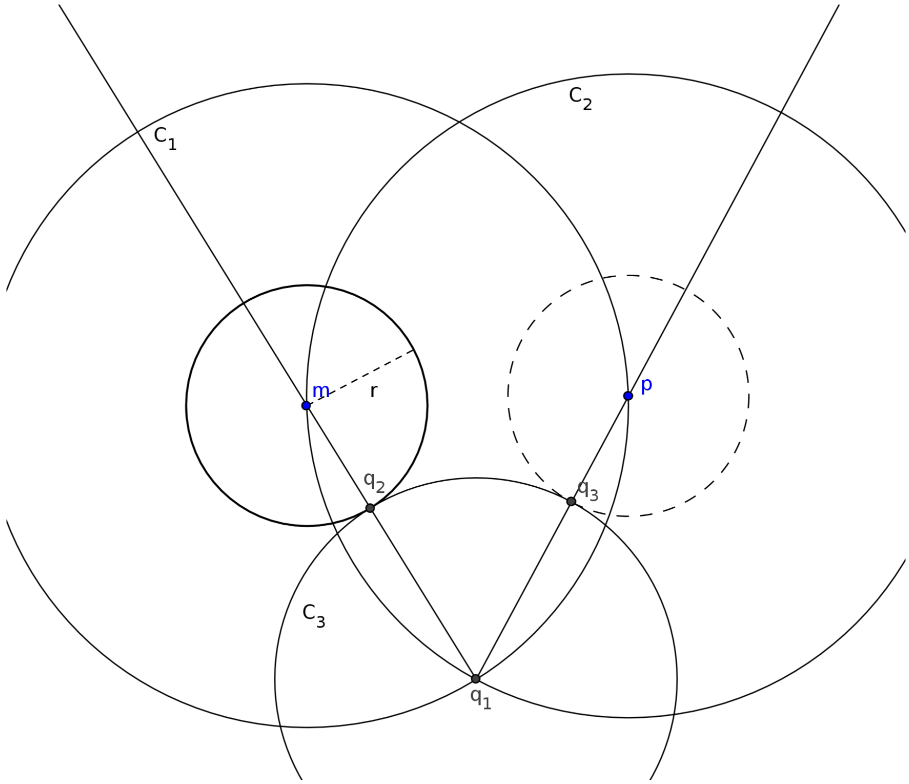
□

Sats 2.1.3 (Euklides I.3)**.** *Givet två sträckor av olika längd kan vi på den längre sträckan avsätta en sträcka av samma längd som den kortare.*

Bevis. Antag att vi har en längre sträcka ab och en kortare cd. Rita en cirkel med mittpunkt i c och som går genom d. Enligt Sats 2.1.2 kan vi rita en cirkel med samma radie och centrum i a. Denna cirkel skär linjen mellan a och b i en punkt e sådan att sträckan ae är lika lång som cd. □

Nedan följer fem satser som vi listar utan bevis.

Sats 2.1.4 (Euklides I.4)**.** *Antag att vi har två trianglar där två av sidorna överensstämmer i längd, samt att vinkeln där dessa två sidor möts är samma*



Figur 2.2: Illustration av beviset av Sats 2.1.2

i de båda trianglarna, så som illustreras i Figur 2.3. Då överensstämmer även den tredje sidan, och de övriga två vinklarna.

Sats 2.1.5 (Euklides I.5)**.** *I en likbent triangel är de två vinklarna vid triangelns bas lika. Om de två benen förlängs är de två vinklarna under triangelns bas också lika.*

Se Figur 2.4 för ett förtydligande av Sats 2.1.5.

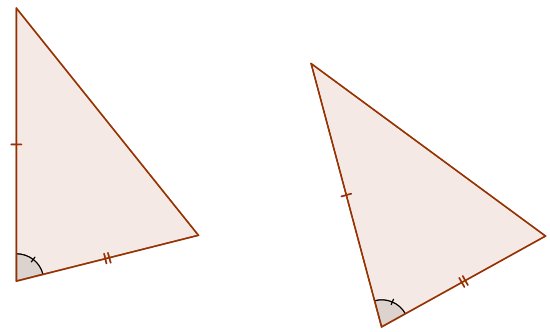
Sats 2.1.6 (Euklides I.6)**.** *Om en triangel har två lika vinklar är de två sidor motstående mot de två vinklarna också lika.*

Sats 2.1.7 (Euklides I.7)**.** *Antag att vi har två trianglar som delar samma bas, och som har sina respektive tredje hörn på samma sida om basen. Om de sidor som utgår från samma hörn vid basen också har samma längd är trianglarna lika.*

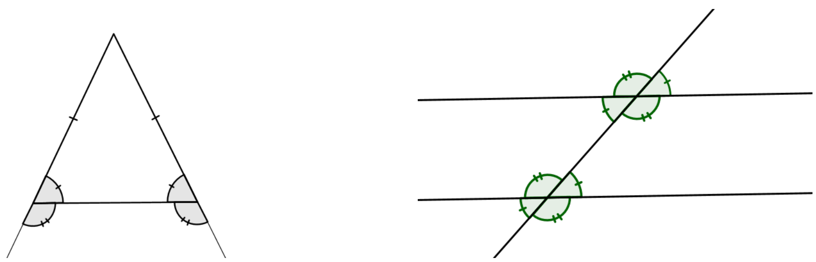
Sats 2.1.8 (Euklides I.8)**.** *Om vi har två trianglar vars sidor överensstämmer i längd så överensstämmer även vinklarna.*

Efter dessa satser följer i Elementa igen fyra satser om geometriska konstruktioner. Vi bevisar tre av dem, och lämnar en som övning.

Sats 2.1.9 (Euklides I.9)**.** *Givet en vinkel kan vi dela denna vinkel i två lika stora delar.*



Figur 2.3: De två trianglarna i Euklides I.4.



Figur 2.4: Från vänster: Euklides I.5 och Euklides I.29

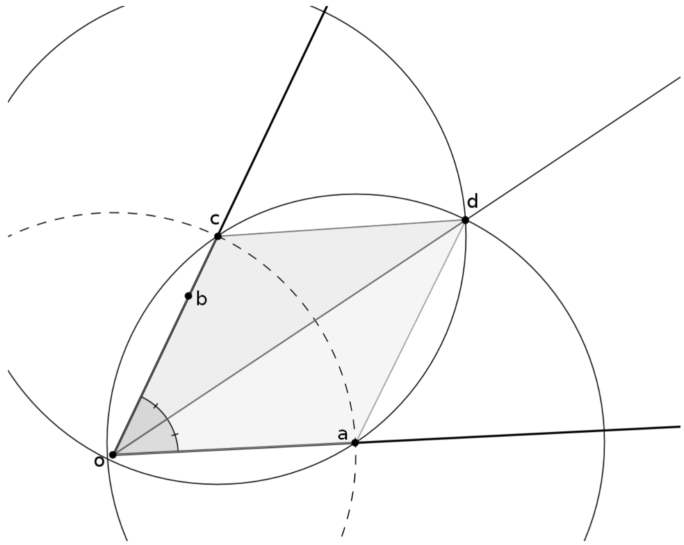
Bevis. Beviset illustreras i Figur 2.5.

Vi startar alltså med tre punkter som vi kan kalla o, a och b, samt vinkeln aob. Punkterna a och b ligger inte nödvändigtvis på samma avstånd från o. Låt oss därför använda passaren för att rita den cirkel som har centrum i o och går genom a. Därefter förlänger vi, om nödvändigt, sträckan ob så att den skär cirkeln. Låt oss kalla skärningspunkten för c. Nu vet vi med säkerhet att a och c ligger på samma avstånd från o. Låt oss nu rita en cirkel med centrum i a som går genom c, och en med centrum i c som går genom a. Notera att de båda cirklarna har samma radie, som vi kan kalla r. Dessa cirklar har två skärningspunkter. Låt d vara den av skärningspunkterna som ligger längst bort från o. Vi drar även en linje från d till o. Vi ska se att denna linje delar vinkeln i två lika delar. Betrakta de två trianglarna med hörn i o, a och d, respektive o, c och d. Sträckan ad är lika lång som sträckan cd, eftersom båda har längd r. Det betyder att vi har två trianglar vars sidor överensstämmer i längd. Då överensstämmer även vinklarna, enligt Sats 2.1.8. Speciellt är vinklarna doc och doa lika.

□

Sats 2.1.10 (Euklides I.10)**.** *Givet en sträcka kan vi konstruera den punkt på sträckan som ligger mitt emellan de två ändpunkterna.*

Beviset lämnas som Övning 2.1.



Figur 2.5: Linjen som går genom o och d delar vinkeln aob i två lika delar.

Sats 2.1.11 (Euklides I.11)**.** *Givet en linje och en punkt på linjen kan vi konstruera en linje som går genom den givna punkten och som är vinkelrät mot den första linjen.*

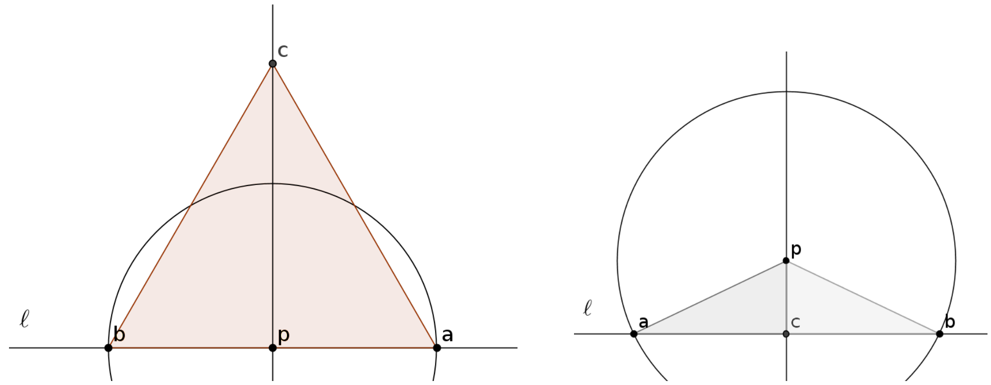
Bevis. Beviset illustreras till vänster i Figur 2.6.

Låt oss kalla linjen för ℓ, och punkten för p. Rita en cirkel med centrum i p som går genom en godtycklig punkt a på ℓ. Cirkeln skär också ℓ i en annan punkt b. Vi kan nu konstruera en liksidig triangel med hörn i a och b, enligt Sats 2.1.1. Låt oss kalla det tredje hörnet för c. Rita ut den linje som går genom p och c. Denna linje är vinkelrät mot ℓ, vilket kan inses på följande sätt. Vi tänker oss två trianglar, en med hörn i a, c och p, och en med hörn i b, c och p. Observera att a och b ligger på samma avstånd från p. Sidorna i de två trianglarna överensstämmer alltså i längd. Då överensstämmer även vinklarna, enligt Sats 2.1.8. Speciellt är vinklarna cpa och bpc lika. Enligt Definition 1.3.1 har vi då en rät vinkel. □

Sats 2.1.12 (Euklides I.12)**.** *Givet en linje och en punkt som inte ligger på linjen kan vi konstruera en linje som går genom den givna punkten och som är vinkelrät mot den första linjen.*

Bevis. Beviset illustreras till höger i Figur 2.6.

Låt oss kalla linjen för ℓ och punkten för p. Rita en cirkel med centrum i p som går genom en godtycklig punkt a på ℓ. Cirkeln skär också ℓ i en annan punkt b. Låt c vara mittpunkten mellan a och b, vilken kan konstrueras enligt Sats 2.1.10. Dra en linje mellan c och p. Denna linje är vinkelrät mot ℓ, vilket kan inses på följande sätt. Vi tänker oss två trianglar, en med hörn i a, c och p, och en med hörn i b, c och p. Sidorna hos de två trianglarna överensstämmer i längd. Då överensstämmer även vinklarna, så vinklarna pca och bcp är lika. Detta är då en rät vinkel.



Figur 2.6: Konstruktionerna av en linje vinkelrät mot en given linje.

□

Sats 2.1.11 och Sats 2.1.12 ger alltså tillsammans att vi, givet en linje och en punkt, kan konstruera en linje som är vinkelrät mot den givna linjen och som går genom punkten.

Sats 2.1.13 (Euklides I.13)**.** *Antag att vi har två linjer sådana att den ena linjen utgår från en punkt på den andra. Summan av de två vinklarna mellan linjerna är då lika med summan av två räta vinklar.*

Vi har nu sett de tretton första satserna i Elementa. Vi kommer nu att ta upp ytterligare några utvalda satser.

Sats 2.1.14 (Euklides I.16)**.** *Om en av sidorna i en triangel förlängs är den yttre vinkel som uppstår större än vardera av de två inre motsatta vinklarna.*

Sats 2.1.15 (Euklides I.23)**.** *Givet en vinkel och en linje kan vi, från en given punkt på linjen, dra ytterligare en linje så att vinkeln mellan linjerna är samma som den givna vinkeln.*

Sats 2.1.16 (Euklides I.26)**.** *Om två trianglar har två vinklar och en sida som överensstämmer så överensstämmer även de övriga två sidorna och den tredje vinkeln.*

Härnäst kommer satsen om alternatvinklar vid parallella linjer, som nämndes i Kapitel 1. Denna sats är den första i Elementa vars bevis använder sig av av parallellaxiomet.

Sats 2.1.17 (Euklides I.29)**.** *Antag att vi har två parallella linjer, samt ytterligare en linje som skär de två parallella linjerna. Då är alternatvinklarna lika. Varje yttre vinkel är lika med den inre motstående vinkeln. Summan av två inre vinklar på samma sida är lika med summan av två räta vinklar.*

Se Figur 2.4 för ett förtydligande av Sats 2.1.17.

Sats 2.1.18 (Euklides I.31)**.** *Givet en linje och en punkt som inte ligger på linjen kan vi dra en linje som är parallell med den givna linjen och går genom punkten.*

Bevis. Låt oss kalla den givna linjen för ℓ_1, och punkten för p. Enligt Sats 2.1.12 kan vi dra en linje ℓ_2 som är vinkelrät mot ℓ_1 och går genom p. Därefter kan vi använda Sats 2.1.11 för att dra en linje ℓ_3 som går genom p och är vinkelrät mot ℓ_2. Vi vill nu bevisa att ℓ_1 och ℓ_3 verkligen är parallella. Vi ska alltså bevisa att dessa linjer inte har någon skärningspunkt. Låt säga att de skulle ha en skärningspunkt, som vi kan kalla q. Låt oss också kalla skärningspunkten mellan ℓ_1 och ℓ_2 för s. Om punkten q existerar har vi nu en triangel med hörn i p, s och q. Men vi vet att vinklarna vid p och s är räta, vilket medför att vi har en triangel med en rät yttervinkel vars ena motstående innervinkel också är rät. Detta motsäger Sats 2.1.14, så vi kan dra slutsatsen att en skärningspunkt mellan ℓ_1 och ℓ_3 inte kan existera. Vi har då visat att de är parallella. $\square$

Sats 2.1.19 (Euklides I.32)**.** *Om en av sidorna i en triangel förlängs är den yttre vinkel som uppstår lika med summan av de två inre motsatta vinklarna. Summan av triangelns inre vinklar är också lika med summan av två räta vinklar.*

Sats 2.1.19 innehåller två påståenden. Beviset av det andra påståendet såg vi i Kapitel 1, vilket använde sig av Euklides I.13 och I.29. Det första påståendet bevisas på ett liknande sätt, men vi utelämnar det här.

Nästa sats känner vi igen som *Pythagoras sats*.

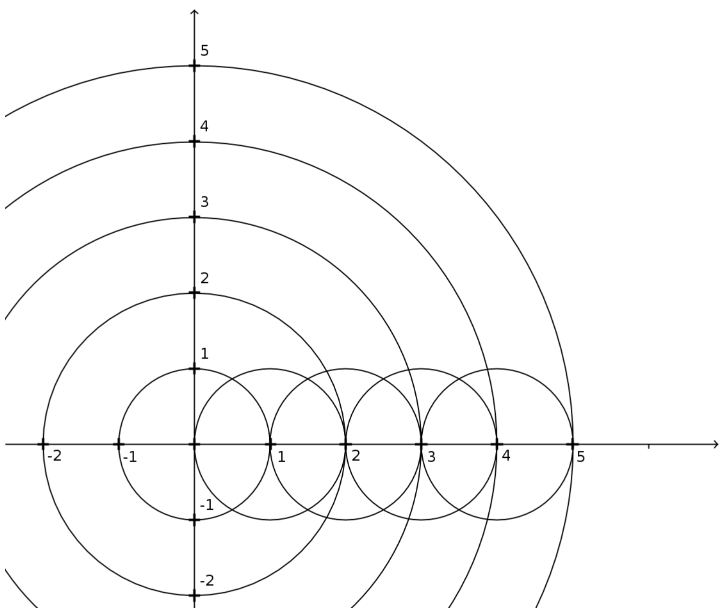
Sats 2.1.20 (Euklides I.47)**.** *I en rätvinklig triangel är kvadraten av hypotenusans längd lika med summan av kvadraterna av de två kateternas längder.*

Vi avslutar med en sats från den sjätte boken i Elementa. Denna sats är också känd som *Topptriangelsatsen*

Sats 2.1.21 (Euklides VI.2)**.** *Antag att vi i en triangel ritar ut en linje parallell med en av triangelns sidor, så att linjen skär de andra sidorna i triangeln. Detta ger oss en ny triangel. Förhållandet mellan längderna av motsvarande sidor i de två trianglarna är då samma för de tre sidorna.*

2.2 Konstruerbara tal

Notera att vi alltid behöver minst två punkter att utgå ifrån vid våra konstruktioner, eftersom både passaren och linjalen kräver det. Har vi väl två punkter kan vi dock konstruera väldigt mycket. Låt säga att vi har två punkter, och drar en linje genom dessa två punkter. Enligt Sats 2.1.11, kan vi dra en till linje, som är vinkelrät mot den första och går genom en av punkterna. Låt oss därefter betrakta den första linjen som en x-axel, den andra linjen som en y-axel, och en av de ursprungliga punkterna som 1:an på x-axeln. Då har vi skapat ett slags koordinatsystem. Alla punkter vi konstruerar därefter kan betraktas som punkter i detta koordinatsystem. Detta är kanske inte så användbart, om vi enbart har talet 1 markerat på x-axeln. Det visas dock enkelt att vi åtminstone kan markera ut så många heltal vi vill på x-axeln. Med hjälp av passaren kan vi rita en cirkel med centrum i punkten $(1, 0)$ (alltså 1:an på x-axeln), som går genom origo. Genom att markera den andra skärningspunkten mellan cirkeln och x-axeln får vi talet 2 på x-axeln, alltså punkten $(2, 0)$.



Figur 2.7: Konstruktion av ett koordinatsystem

Vi får på samma sätt $(3, 0)$, genom att rita en cirkel med centrum i $(2, 0)$, som går genom $(1, 0)$. På samma sätt kan vi fortsätta och få talen 4, 5, 6, o.s.v. på x-axeln. Vi kan också rita cirklar med centrum i origo, som går genom de punkter vi markerat på x-axeln, för att få deras negativa motsvarigheter, samt även motsvarande punkter på y-axeln. Detta illustreras i Figur 2.7.

Notera att vi, givet en punkt (x, y), med hjälp av Sats 2.1.18 kan dra en linje parallell med y-axeln, som går genom punkten (x, y). På så sätt får vi punkten $(x, 0)$ som skärningspunkten med x-axeln. På motsvarande sätt kan vi förstås också få punkten $(0, y)$ på y-axeln. Man kan säga att vi konstruerat talet x (och talet y). Detta leder till följande definition.

Definition 2.2.1. Låt säga att vi, utifrån två givna punkter, har byggt upp ett koordinatsystem, på det sätt som beskrivs ovan. En *konstruerbar punkt* är en punkt (x, y) som kan konstrueras med hjälp av passare och linjal i ett ändligt antal steg, utifrån punkterna $(0, 0)$ och $(1, 0)$. Ett *konstruerbart tal* är ett reellt tal x sådant att punkten $(x, 0)$ är konstruerbar. Mängden av alla konstruerbara tal kommer i detta kompendium betecknas med $\mathbb{K}$.

Vi har hittills sett att heltalen är konstruerbara.

Sats 2.2.2. *Antag att vi har två punkter, och låt r vara avståndet mellan punkterna. Då är r ett konstruerbart tal.*

Beviset lämnas som övning. Sambandet som beskrivs i nästa sats är inte speciellt svårt att bevisa, men är ändå värt att notera.

Sats 2.2.3. *Två reella tal x och y är konstruerbara om och endast om (x, y) är en konstruerbar punkt.*

Anmärkning 2.2.4. Uttrycket ”om och endast om” används ofta i matematiska satser. För att bevisa att ett påstående P gäller om och endast om ett påstående Q gäller, behöver vi bevisa två saker. Vi behöver bevisa att om P är sant så är också Q sant. Men vi behöver också bevisa att om Q är sant så är även P sant. Detta kallas även för att P och Q är ekvivalenta. För att bevisa Sats 2.2.3 behöver vi utföra följande två bevis.

- Antag att x och y är konstruerbara tal. Bevisa att punkten (x, y) är konstruerbar.
- Antag att punkten (x, y) är konstruerbar. Bevisa att x och y är konstruerbara tal.

De två bevisen är oberoende av varandra, så det spelar ingen roll i vilken ordning man utför dem.

Bevis. Antag först att x och y är konstruerbara tal. Enligt definitionen betyder det att $(x, 0)$ och $(y, 0)$ är konstruerbara punkter. Tag passaren och rita en cirkeln med centrum i origo, som går genom $(y, 0)$. Cirkeln skär y-axeln i $(0, y)$. Enligt Sats 2.1.18 kan vi dra en linje parallell med x-axeln, som går genom $(0, y)$. Vi kan också dra en linje parallell med y-axeln, som går genom $(x, 0)$. Dessa två linjer skär varandra i punkten (x, y).

Om vi i stället utgår ifrån punkten (x, y) kan vi göra exakt samma konstruktion, fast i omvänd ordning för att först få punkterna $(x, 0)$ och $(0, y)$, och därefter även $(y, 0)$. Det följer att x och y är konstruerbara tal. □

2.3 Omöjliga konstruktioner

Vi har nu sett att en hel del kan konstrueras med passare och linjal. Men det finns dock vissa begränsningar. Nedan listas tre klassiska ”olösliga problem”.

- **Kubens fördubbling.** Givet sidan av en kub, konstruera sidan av en kub av dubbel volym.
- **Vinkelns tredelning.** Givet en vinkel, konstruera linjer som delar vinkeln i tre lika stora delar.
- **Cirkelns kvadratur.** Givet en cirkel, konstruera en kvadrat med samma area.

Dessa tre konstruktioner är alltså omöjliga att utföra med passare och linjal. Problemen studerades redan under antiken, men de bevisades vara omöjliga först under 1800-talet. I Kapitel 7 kommer vi att bevisa omöjligheten hos kubens fördubbling och vinkelns tredelning. För att nå dit kommer vi att göra avstickare till några olika områden inom matematiken. Att bevisa att cirkelns kvadratur är omöjlig ligger utanför ramarna för den här kursen.

Övningar

Tanken är att övningarna ska lösas med hjälp av de resultat vi sett i Kapitel 2, om inget annat anges.

Övning 2.1 ($\star\star$)**.** Bevisa Sats 2.1.10. De nio första satserna i kapitlet får användas.

Övning 2.2 ($\star\star$)**.** Antag att vi har två linjer som bildar en rät vinkel. Bevisa att vi kan konstruera ytterligare två linjer, så att den räta vinkeln delas i tre lika stora delar.

Observera att detta inte motsäger omöjligheten i vinkelns tredelning, som nämndes i avsnitt 2.3. Övningen visar att just denna vinkel kan tredelas, men det betyder inte att vi kan tredela alla vinklar.

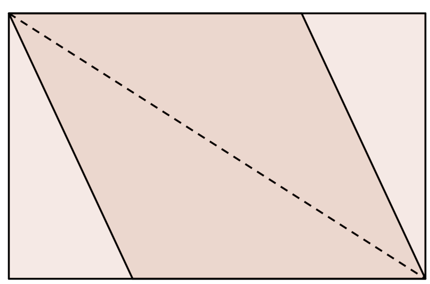
Övning 2.3 ($\star$)**.** Figur 2.2 som illustrerar beviset av Sats 2.1.2 visar fallet då punkten p ligger utanför den givna cirkeln. Hur ser konstruktionen ut då p ligger inuti cirkeln?

Övning 2.4 ($\star\star$)**.** Antag att en cirkel C skär en rät linje ℓ i en punkt p och antag linjen som går genom p och cirkelns mittpunkt m är vinkelrät mot ℓ. Visa att C och ℓ inte har någon ytterligare skärningspunkt utöver p.

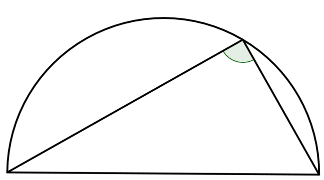
Övning 2.5 ($\star\star\star$)**.** Givet en triangel, konstruera en cirkel inskriven i triangeln. Att en cirkel är inskriven i en triangel betyder att triangelns sidor tangerar cirkeln.

Ledning: Föregående övning kan vara användbar.

Övning 2.6 ($\star\star\star$)**.** En *romb* är en fyrhörning där alla sidor lika långa. Givet en rektangel, konstruera en romb, som delar en diagonal med rektangeln.



Övning 2.7 ($\star\star$)**.** Figuren nedan visar en triangel inskriven i en halvcirkel. Bevisa att en sådan triangel alltid är rätvinklig.



Det här resultatet är känt som Thales sats.

Övning 2.8 ($\star$)**.** Bevisa att ett reellt tal x är konstruerbart om och endast om det finns ett reellt tal y så att (x, y) är en konstruerbar punkt.

Övning 2.9 ($\star$)**.** Bevisa Sats 2.2.2.

Övning 2.10 ($\star$)**.** Bevisa att $-\frac{1}{2}$ är ett konstruerbart tal.

Övning 2.11 ($\star\star\star$)**.** I den här uppgiften ska vi visa att en regelbunden pentagon, det vill säga. en femhörning är konstruerbar. Pentagonen vi konstruerar kommer att ha sina hörn på cirkeln med radie 1 och centrum i origo.

(i) Räkna ut längden av pentagonens sida. Till hjälp har du de trigonometriska sambanden

$$\sin(x/2) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}},$$
$$\text{och } \cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Se Appendix A för definitionerna av sinus och cosinus.

(ii) Låt C vara cirkeln med centrum i $(0, -\frac{1}{2})$ som går genom $(1, 0)$ och låt p vara skärningspunkten mellan C och den positiva y-axeln. Beräkna avståndet mellan p och $(1, 0)$.

(iii) Konstruera pentagonen! (Du får använda punkten p i konstruktionen.)

3 Kroppar och kvadratiska utvidgningar

I det här kapitlet ska vi först se att passaren och linjalen tillåter oss att utföra några vanliga räkneoperationer på de tal vi konstruerat. För att bättre förstå de konstruerbara talens natur ska vi sedan lite mer allmänt studera mängder av reella tal som har just dessa egenskaper. Dessa mängder kallas för kroppar.

3.1 Kroppar

Sats 3.1.1. *Antag att a och b är konstruerbara tal. Då kan vi även konstruera $a+b$, $a-b$, och $a \cdot b$. Om $b \neq 0$ kan vi också konstruera a/b. Förutsatt att $a > 0$ kan vi även konstruera $\sqrt{a}$.*

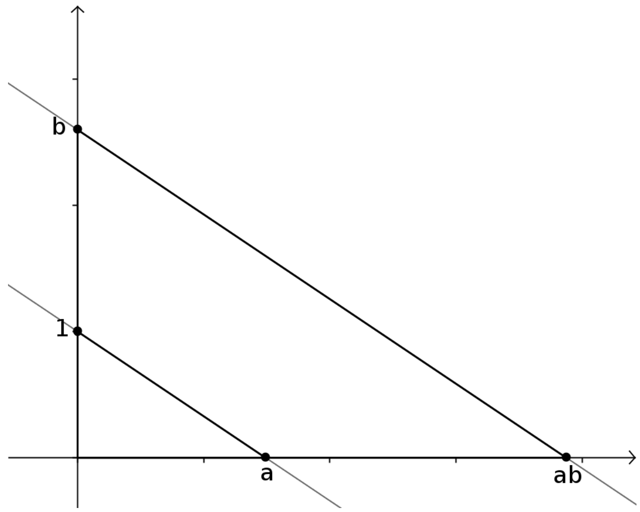
Bevis. Eftersom a och b är konstruerbara tal har vi punkterna $(a, 0)$ och $(b, 0)$ på x-axeln. Med hjälp av passaren också kan få punkterna $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$, $(-b, 0)$, $(0, b)$ och $(0, -b)$.

Vi börjar med att konstruera $a+b$ och $a-b$. Låt oss anta att $a \geq b$. Avståndet mellan $(a, 0)$ och $(b, 0)$ är $a-b$. Avståndet från $(-b, 0)$ till $(a, 0)$ är $a+b$. Enligt Sats 2.2.2 är därför $a+b$ och $a-b$ konstruerbara tal. Om $a \leq b$ är avståndet mellan $(a, 0)$ och $(b, 0)$ i stället $b-a$. Men då är även $-(b-a) = a-b$ ett konstruerbart tal.

Låt oss går vidare till $a \cdot b$. Vi börjar med att gå igenom en konstruktion av ab i fallet då a och b är positiva tal. Konstruktionen illustreras i Figur 3.1. Låt oss dra en linje mellan $(a, 0)$ och $(0, 1)$. Därefter använder vi Sats 2.1.18 för att dra en parallell linje, som går genom $(0, b)$. Denna linje skär x-axeln i någon punkt $(c, 0)$. De två linjerna bildar, tillsammans med koordinataxlarna, två trianglar. Enligt Sats 2.1.21 är förhållandet mellan motsvarande sidor är detsamma för de tre sidorna. Vi får därför att $c/a = b/1$, det vill säga $c = ab$. Vi har alltså konstruerat punkten $(ab, 0)$, och det följer att ab är ett konstruerbart tal. Vi behöver nu behandla fallet då minst en av a eller b inte är positiv. Om någon av dem är 0 har vi $ab = 0$, vilket ju är ett konstruerbart tal. Säg att a är negativ, och b positiv. Vi kan då utföra den konstruktion som beskrevs ovan på de positiva talen $-a$ och b. Det ger oss det punkten $(-ab, 0)$, och vi kan enkelt få även punkten $(ab, 0)$ med hjälp av passaren. Det följer att ab är konstruerbar även i detta fall. Fallet då a är positiv och b negativ följer på samma sätt. Antag sist att både a och b är negativa. Då vet vi att produkten av de två positiva talen $-a$ och $-b$ är konstruerbar. Det vill säga, $(-a)(-b) = ab$ är ett konstruerbart tal. Vi har nu gått igenom alla möjliga fall, och det följer att produkten av två konstruerbara tal alltid är konstruerbar.

Att a/b, då $b \neq 0$, är konstruerbart kan visas på ett liknande sätt. Vi lämnar beviset som Övning 3.1.

Slutligen ska vi bevisa att $\sqrt{a}$ är konstruerbar, för positivt a. Vi har tidigare sett att vi kan konstruera mittpunkten av en sträcka. Låt oss här konstruera mittpunkten mellan $(0, a)$ och $(0, -1)$, på y-axeln. En enkel beräkning visar att detta är punkten $(0, \frac{a-1}{2})$. Låt oss nu rita ut cirkeln som har sin mittpunkt i $(0, \frac{a-1}{2})$, och går genom $(0, a)$ (och även genom $(0, -1)$). Cirkelns radie är



Figur 3.1: Konstruktion av produkten av två tal

$\frac{a+1}{2}$. Låt $(c, 0)$ vara den punkt där cirkeln skär den positiva x-axeln. Dra en linje från cirkelns mittpunkt till $(c, 0)$. Denna linje bildar tillsammans med koordinataxlarna en rätvinklig triangel. Triangelns två kateter har längd $\frac{a-1}{2}$ och c, och hypotenusan har längd $\frac{a+1}{2}$. Med hjälp av Pythagoras sats får vi nu sambandet

$$\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + c^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2,$$

vilket ger

$$c^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1)}{4} = a.$$

Det vill säga, $c = \sqrt{a}$, vilket vi nu har visat är ett konstruerbart tal. Se även Figur 3.2.

$\square$

Vi kan alltså utföra de fyra vanliga räkneoperationerna addition, subtraktion, multiplikation och division på mängden av konstruerbara tal. Detta kallas för att mängden är sluten under dessa operationer. Allmänt kallas en talmängd som är sluten under de fyra vanliga räkneoperationerna för en kropp.

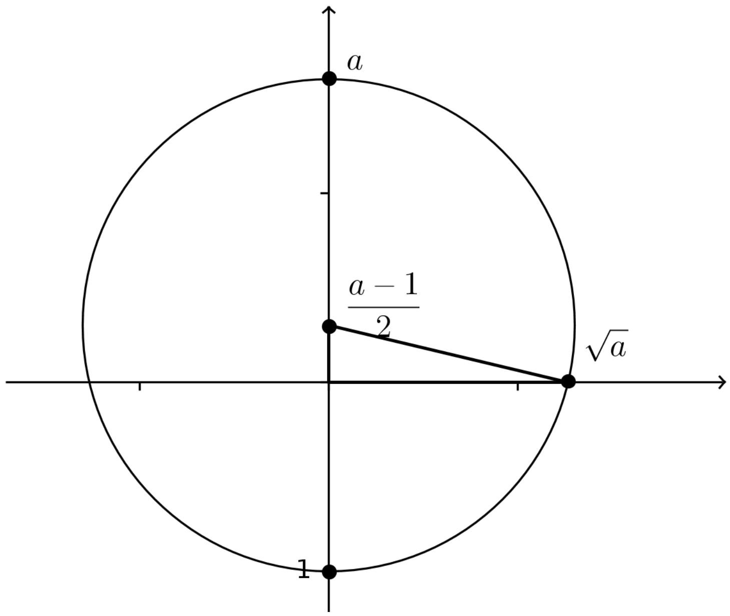
Definition 3.1.2. En delmängd K av de reella talen, som innehåller talet 1 kallas för en *kropp* om den uppfyller:

(i) Slutenhet under addition: $x + y \in K$ för alla $x, y \in K$.

(ii) Slutenhet under subtraktion: $x - y \in K$ för alla $x, y \in K$.

(iii) Slutenhet under multiplikation: $x \cdot y \in K$ för alla $x, y \in K$.

(iv) Slutenhet under division: $\frac{x}{y} \in K$ för alla $x, y \in K$, $y \neq 0$.



Figur 3.2: Konstruktion av kvadratroten av ett tal

En kropp K har alltså egenskapen att att om vi använder något av de fyra räknesätten på ett par av tal ur K, får vi ett nytt tal som också tillhör K. Observera att varje kropp innehåller talet 0: Vi vet ju att varje kropp innehåller talet 1, och är sluten under subtraktion, enligt definitionen. Det följer att även $1 - 1 = 0$ tillhör kroppen.

Anmärkning 3.1.3. Definitionen som ges ovan är inte den mest allmänna definition av en kropp. I själva verket tillåts kroppar vanligtvis innehålla element som inte är reella tal. Definition 3.1.2 räcker dock för våra avsikter i denna kurs. En mer allmän definition återfinns exempelvis i fjolårets Cirkelkompendium.

Vi låter från och med nu $\mathbb{K}$ beteckna mängden av konstruerbara tal. Vi har alltså bevisat att $\mathbb{K}$ är en kropp. Vi inser också att $\mathbb{R}$ själv är en kropp. Nedan följer ett annat exempel på en kropp.

Exempel 3.1.4. De rationella talen är en kropp. Till att börja med innehåller ju $\mathbb{Q}$ talet 1. Genom att använda välkända räkneregler för rationella tal ska vi nu visa att $\mathbb{Q}$ uppfyller villkor $(i) - (iv)$ i Definition 3.1.2. Låt därför $p, q \in \mathbb{Q}$ och ta heltal a, b, c, d sådana att

$$p = \frac{a}{b}, \text{ och } q = \frac{c}{d}.$$

Det vi måste visa är att summan, differensen, produkten och kvoten av p och q kan skrivas som en kvot av två heltal.

(i) Slutenhet under addition:

$$\begin{aligned} p + q &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad + bc}{bd}. \end{aligned}$$

Observera att varken b eller d kan vara noll, vilket gör att bd inte heller är noll.

(ii) Slutenhet under subtraktion:

$$\begin{aligned} p - q &= \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad - bc}{bd}. \end{aligned}$$

(iii) Slutenhet under multiplikation:

$$\begin{aligned} pq &= \frac{a}{b}\frac{c}{d} \\ &= \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

(iv) Slutenhet under division: Vi antar här att $q \neq 0$, vilket medför att $c \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{a/b}{c/d} \\ &= \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

▲

Exempel 3.1.5. Ett exempel på en delmängd av $\mathbb{R}$ som inte är en kropp är $\mathbb{Z}$. Anledningen till det är att $\mathbb{Z}$ inte är sluten under division, ty 1 och 2 är ju heltal, men inte deras kvot $\frac{1}{2}$. ▲

En vanligt förekommande situation är att en kropp ”bor inuti” en annan kropp.

Definition 3.1.6. Låt K och L vara två kroppar. Om K är en delmängd av L, sägs K var en *delkropp* av L. Vi kan även uttrycka detta genom att säga att L är en *kroppsutvidgning* av K.

Exempel 3.1.7. De reella talen är en kroppsutvidgning av de rationella talen. I själva verket är varje kropp en kroppsutvidgning av de rationella talen. Att bevisa detta påstående är lämnat åt läsaren som Övning 3.3. ▲

Definition 3.1.8. En kropp K är en *euklidisk kropp* om $\sqrt{x} \in K$ för alla $x \in K$ sådana att $x > 0$.

Exempel 3.1.9. Sats 3.1.1 ger att mängden av konstruerbara tal är en euklidisk kropp. Ett exempel på en kropp som inte är euklidisk är de rationella talen (vi såg ju redan i det första kapitlet i detta kompendium att $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). ▲

3.2 Kvadratiska kroppsutvidgningar

Nästa sats handlar om en speciell typ av kroppsutvidgningar som kommer att spela en avgörande roll när vi i nästa kapitel ska binda samman geometriska och algebraiska resultat.

Sats 3.2.1. *Låt K vara en kropp och låt α vara ett positivt tal sådant att $\alpha \in K$, men $\sqrt{\alpha} \notin K$. Låt $K(\sqrt{\alpha})$ beteckna följande mängd:*

$$K(\sqrt{\alpha}) = \{x + y\sqrt{\alpha} \mid x, y \in K\}.$$

Då är $K(\sqrt{\alpha})$ en kroppsutvidgning av K.

Bevis. Vi börjar med att verifiera att K är en delmängd av $K(\sqrt{\alpha})$. Vi ska alltså visa att varje tal i K kan skrivas på formen $x + y\sqrt{\alpha}$, för x och y i K. Det är sant eftersom varje $x \in K$ kan skrivas som $x = x + 0\sqrt{\alpha}$, och $0 \in K$.

Vi måste också visa att villkoren i Definition 3.1.2 gäller för mängden $K(\sqrt{\alpha})$. För det första är det klart att $K(\sqrt{\alpha})$ innehåller 1, eftersom K gör det. Vi ska nu bevisa att $K(\sqrt{\alpha})$ uppfyller villkor (i) - (iv). Låt därför $k_1, k_2 \in K(\sqrt{\alpha})$. Per definition av $K(\sqrt{\alpha})$ finns det $x_1, y_1, x_2, y_2 \in K$ sådana att

$$\begin{aligned} k_1 &= x_1 + y_1\sqrt{\alpha} \\ k_2 &= x_2 + y_2\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

(i) Slutenhet under addition:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= (x_1 + y_1\sqrt{\alpha}) + (x_2 + y_2\sqrt{\alpha}) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Eftersom K är sluten under addition har vi att $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in K$. Detta medför att $k_1 + k_2 \in K(\sqrt{\alpha})$.

(ii) Slutenhet under subtraktion:

$$\begin{aligned} k_1 - k_2 &= (x_1 + y_1\sqrt{\alpha}) - (x_2 + y_2\sqrt{\alpha}) \\ &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Eftersom K är sluten under subtraktion har vi att $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in K$, och det följer att $k_1 - k_2 \in K(\sqrt{\alpha})$.

(iii) Slutenhet under multiplikation:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 &= (x_1 + y_1\sqrt{\alpha})(x_2 + y_2\sqrt{\alpha}) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2\sqrt{\alpha} + y_1\sqrt{\alpha}x_2 + y_1\sqrt{\alpha}y_2\sqrt{\alpha} \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2\alpha) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Då $\alpha \in K$ ger slutenhet hos K under addition och multiplikation att $(x_1x_2 + y_1y_2\alpha), (x_1y_2 + x_2y_1) \in K$, vilket ger $k_1k_2 \in K(\sqrt{\alpha})$.

(iv) Slutenhet under division:

Vi antar nu att $k_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{k_1}{k_2} &= \frac{x_1 + y_1\sqrt{\alpha}}{x_2 + y_2\sqrt{\alpha}} \\
&= \frac{(x_1 + y_1\sqrt{\alpha})(x_2 - y_2\sqrt{\alpha})}{(x_2 + y_2\sqrt{\alpha})(x_2 - y_2\sqrt{\alpha})} \\
&= \frac{x_1x_2 - x_1y_2\sqrt{\alpha} - y_1\sqrt{\alpha}x_2 + y_1\sqrt{\alpha}y_2\sqrt{\alpha}}{x_2^2 - (y_2\sqrt{\alpha})^2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2\alpha) - (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{\alpha}}{x_2^2 - y_2^2\alpha} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2\alpha}{x_2^2 - y_2^2\alpha} - \frac{(x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 - y_2^2\alpha}\sqrt{\alpha}
\end{aligned}$$

Slutenhet hos K under addition, multiplikation, subtraktion och division ger att $\frac{x_1x_2+y_1y_2\alpha}{x_2^2-y_2^2\alpha}$ och - $\frac{(x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^2-y_2^2}$ är element i K, vilket betyder att $\frac{k_1}{k_2} \in K(\sqrt{\alpha})$. Innan beviset kan anses avslutat måste vi dock visa att $x_2 - y_2\sqrt{\alpha} \neq 0$, ty annars kan vi inte förlänga bråket så som vi gjorde efter det tredje likhetstecknet ovan. Vi ska använda oss av ett motsägelsebevis för att visa detta. Antag därför att

$$x_2 - y_2\sqrt{\alpha} = 0.$$

Vi delar nu upp beviset i två fall. Först antar vi att $y_2 = 0$, vilket ger att $x_2 = 0$. Men då är $k_2 = x_2 + y_2\sqrt{\alpha} = 0$, en motsägelse. Därför antar vi istället att $y_2 \neq 0$, men då får vi att

$$\sqrt{\alpha} = \frac{x_2}{y_2} \in K,$$

återigen en motsägelse!

$\square$

Definition 3.2.2. Kroppen $K(\sqrt{\alpha})$ i ovanstående sats sägs vara en *kvadratisk utvidgning* av K.

Exempel 3.2.3. Två exempel på kvadratiska utvidgningar av $\mathbb{Q}$ är $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ och $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. ▲

Vi kan även skapa kvadratiska utvidgningar från andra kroppar än $\mathbb{Q}$.

Exempel 3.2.4. Låt $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Då är $L = K(\sqrt{3})$ en kvadratisk utvidgning av K. Elementen i L är på formen

$$a + b\sqrt{2} + (c + d\sqrt{2})\sqrt{3},$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Notera att det enligt Definition 3.2.2 och Sats 3.2.1 krävs att $\sqrt{3} \notin K$ för att L ska vara en kvadratisk utvidgning av K. Läsaren ombeds visa att så faktiskt är fallet i Övning 3.5. ▲

I det föregående exemplet skapade vi oss en kvadratisk utvidgning från en kropp som i sin tur är en kvadratisk utvidgning av $\mathbb{Q}$. Detta är ett specialfall av en mer allmän konstruktion.

Definition 3.2.5. Givet $n+1$ stycken kroppar $K_0, K_1, \ldots, K_n$ sådana att K_i är en kvadratisk utvidgning av K_{i-1} för varje $i = 1, \ldots, n$, kallar vi K_n för en *upprepad kvadratisk utvidgning* av K_0. Vi skriver även

$$K_n = K_0(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \ldots, \sqrt{\alpha_n}),$$

där $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ är sådana att $\alpha_i \in K_{i-1}$, men $\sqrt{\alpha_i} \notin K_{i-1}$, och $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ för varje $i = 1, \ldots, n$.

Kroppen L i Exempel 3.2.4 kan alltså skrivas som $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Definition 3.2.6. Låt $K(\sqrt{\alpha})$ vara en kvadratisk utvidgning av en kropp K och låt $k \in K(\sqrt{\alpha})$. Övning 3.11 visar att det finns *unika* $a, b \in K$ sådana att $k = a + b\sqrt{\alpha}$. Vi kan därmed definiera *konjugatet* av k genom

$$\overline{k} = a - b\sqrt{\alpha}.$$

Anmärkning 3.2.7. Läsare som känner till de komplexa talen noterar kanske likheten mellan konjugatet i definitionen ovan och det komplexa konjugatet av ett komplext tal.

Hjälpsats 3.2.8. *Låt $K(\sqrt{\alpha})$ vara en kvadratisk utvidgning av en kropp K. För alla $k, l \in K(\sqrt{\alpha})$ gäller det att*

$$\begin{aligned}
\overline{(k+l)} &= \overline{k} + \overline{l}, \\
\overline{(kl)} &= \overline{k} \cdot \overline{l}, \\
\overline{k} &= k \text{ om och endast om } k \in K.
\end{aligned}$$

Bevis. Vi bevisar den första likheten ovan och lämnar de övriga två åt läsaren att bevisa i Övning 3.7. Tag $a, b, c, d \in K$ sådana att

$$\begin{aligned}
k &= a + b\sqrt{\alpha} \\
l &= c + d\sqrt{\alpha}.
\end{aligned}$$

Då får vi

$$\begin{aligned}
\overline{k+l} &= \overline{(a + b\sqrt{\alpha}) + (c + d\sqrt{\alpha})} \\
&= \overline{(a+c) + (b+d)\sqrt{\alpha}} \\
&= (a+c) - (b+d)\sqrt{\alpha} \\
&= (a - b\sqrt{\alpha}) + (c - d\sqrt{\alpha}) \\
&= \overline{k} + \overline{l}
\end{aligned}$$

□

Övningar

Övning 3.1 ($\star$)**.** Bevisa att a/b är ett konstruerbart tal om a och b är konstruerbara, samt $b \neq 0$.

Övning 3.2 ($\star$)**.** Bevisa att

$$\sqrt{\frac{3/5}{1+\sqrt{13}}+1}-6$$

är ett konstruerbart tal. Obs: Du behöver inte utföra själva konstruktionen!

Övning 3.3 ($\star\star$)**.** I Exempel 3.1.4 såg vi att $\mathbb{Q}$ är en kropp. Bevisa att om K är en godtycklig kropp, så är $\mathbb{Q}$ är en delkropp av K.

Övning 3.4 ($\star$)**.** Bevisa följande påstående:

$$\sqrt{8} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Övning 3.5 ($\star\star\star$)**.** Bevisa följande påstående:

$$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Övning 3.6 ($\star\star$)**.** Bevisa följande påstående:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Övning 3.7 ($\star\star$)**.** Slutför beviset av Hjälpsats 3.2.8.

Övning 3.8 ($\star\star$)**.** Betrakta mängden

$$A = \{a\sqrt{2} \ \mid a \in \mathbb{Q}\}.$$

Är A en kropp?

Övning 3.9 ($\star\star$)**.** Betrakta mängden

$$A = \{a+\sqrt{2} \ \mid a \in \mathbb{Q}\}.$$

Är A en kropp?

Övning 3.10 ($\star$)**.** Bevisa att

$$Q(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}.$$

Övning 3.11 ($\star\star$)**.** Låt $K(\sqrt{\alpha})$ vara en kvadratisk utvidgning av en kropp K. Bevisa följande två påståenden

(i) Om $0 = a+b\sqrt{\alpha}$, där $a,b \in K$, så är $a=b=0$.

(ii) Om $a+b\sqrt{\alpha} = c+d\sqrt{\alpha}$, där $a,b,c,d \in K$, så är $a=c$ och $b=d$.

Övning 3.12 ($\star\star\star$)**.** Betrakta mängden

$$A = \{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \ \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}.$$

Är A en kropp?

4 Geometrin blir algebra

I Kapitel 3 såg vi att om två tal är konstruerbara är även deras summa, differens, produkt och kvot konstruerbara. Vi såg också att kvadratroten ur ett positivt konstruerbart tal är konstruerbart. I det här kapitlet ska vi vända på det hela och fråga oss om det finns ett sätt att beskriva *alla* konstruerbara tal. Är de konstruerbara talen de vi kan få med hjälp av Sats 3.1.1, eller finns det fler? För att besvara dessa frågor behöver vi studera koordinaterna för de skärningspunkter mellan cirklar och linjer som kan uppstå. Vi börjar därför med en genomgång av linjens och cirkelns ekvationer.

4.1 Cirkelns och linjens ekvationer

En linje som går genom punkterna (a_1, b_1) och (a_2, b_2) kan beskrivas med ekvationen

$$(a_2 - a_1)(y - b_1) = (b_2 - b_1)(x - a_1).$$

Det betyder att linjen utgörs av de punkter (x, y) som uppfyller ekvationen ovan. Observera att om $a_2 - a_1 = 0$ är linjen lodrät, och beskrivs av ekvationen $x = a_1$.

Kom ihåg att avståndet r mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) beskrivs av sambandet

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Detta kan inses med hjälp av Pythagoras sats. En cirkel med centrum i en punkt (a_1, b_1) och radie r utgörs av alla punkter (x, y) på avstånd exakt r från (a_1, b_1). Cirkeln kan då beskrivas med ekvationen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2.$$

När vi jobbar med de geometriska konstruktionerna brukar vi ju beskriva cirkeln med dess centrum och en punkt på cirkeln, så låt oss göra så även här. Om cirkeln har centrum i (a_1, b_1) och går genom (a_2, b_2) får vi ekvationen

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2.$$

4.2 Ekvationssystem

Att hitta skärningspunkterna mellan t. ex. en linje och en cirkel kan beskrivas algebraiskt som att vi söker de (x, y) som uppfyller både cirkelns och linjens ekvationer. Vi vill alltså hitta de gemensamma lösningarna till två ekvationer. Detta kallas för ett *ekvationssystem*. De ekvationssystem som dyker upp här kommer alla att bestå av två ekvationer, i två variabler x och y. Generellt finns det dock ingen begränsning för hur många ekvationer eller variabler som får förekomma i ett ekvationssystem, och antalet variabler och ekvationer måste inte vara lika. Det ska också sägas att vi enbart söker reella lösningar för x och y.

Säg att vi har två ekvationer $VL_1 = HL_1$ och $VL_2 = HL_2$.[2] Ekvationssystemet av dessa två ekvationer skrivs

$$\begin{aligned} VL_1 &= HL_1, \\ VL_2 &= HL_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vi ska nu gå igenom två enkla operationer som kan användas när vi ska lösa ett ekvationssystem. Den första operationen är att multiplicera en ekvation med ett reellt tal skilt från noll. Att ”multiplicera en ekvation med ett tal” är egentligen ett något slarvigt uttryck för att multiplicera både högerled och vänsterled i ekvationen med ett tal. Om vi t. ex. multiplicerar den första ekvationen i (4.1) med ett reellt tal $c \neq 0$ får vi

$$\begin{aligned} c \cdot VL_1 &= c \cdot HL_1, \\ VL_2 &= HL_2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Den andra operationen är att addera den ena ekvationen till den andra. Detta är igen ett kort uttryck för att addera ekvationernas högerled och vänsterled. Om vi adderar den första ekvationen till den andra i (4.1) får vi

$$\begin{aligned} VL_1 &= HL_1, \\ VL_1 + VL_2 &= HL_1 + HL_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Observera att vi behåller den första ekvationen i systemet. Det följer att vi också kan subtrahera den ena ekvationen från den andra, eftersom det är samma sak som att först multiplicera med -1, och sedan addera. De båda ekvationssystemen (4.2) och (4.3) har exakt samma lösningar som ekvationssystemet (4.1) som vi startade med. Poängen är alltså att stegvis förenkla ekvationssystemet, utan att förändra dess lösningar, tills att vi får ett system där vi faktiskt kan se vilka lösningarna är.

Exempel 4.2.1. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 5, \\ 3x^2 - 2y^2 &= 10. \end{cases}$$

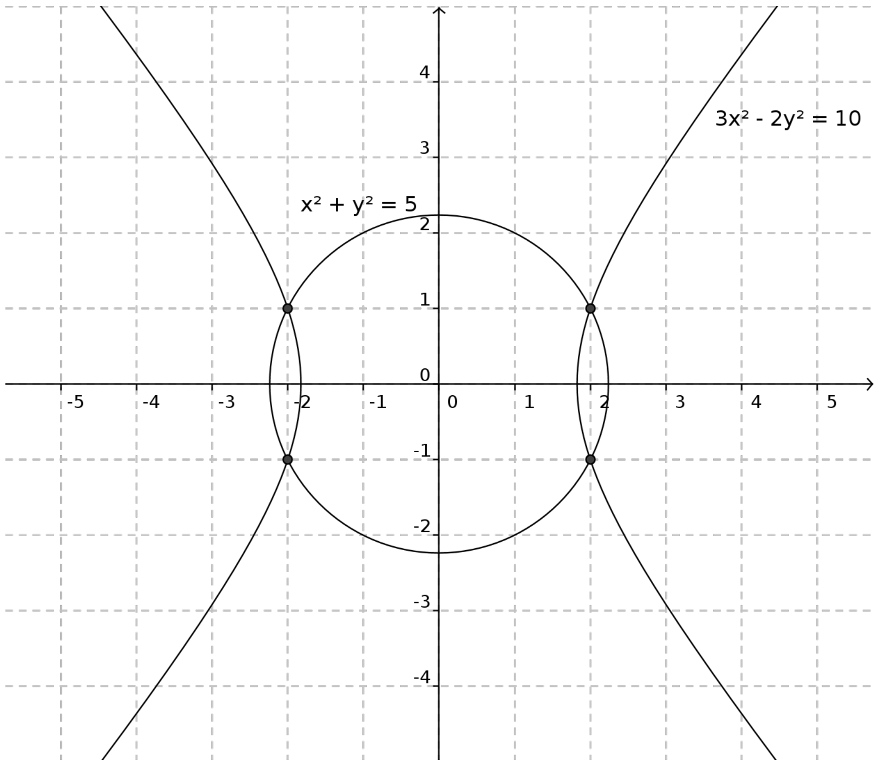
Den första ekvationen beskriver en cirkel, och den andra en hyperbel. Vi börjar med att multiplicera den första ekvationen med 3, och sedan subtrahera den från den andra. Det ger först

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 &= 15, \\ 3x^2 - 2y^2 &= 10 \end{cases} \quad \text{och sedan} \quad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 &= 15, \\ -5y^2 &= -5. \end{cases}$$

Vi såg alltså till att koefficienten för x^2 blev samma i de båda ekvationerna, för att sedan kunna eliminera x^2 ur den andra ekvationen. Låt oss nu förenkla något genom att multiplicera den första ekvationen med $1/3$ och den andra med $-1/5$. Då får vi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 5, \\ y^2 &= 1. \end{cases}$$

[2] VL står för vänsterled och HL för högerled. Den nedsäknta siffran används för att tala om vilken ekvation vi är i. Till exempel står alltså VL_1 för vänsterledet i ekvation ett.



Figur 4.1: Cirkeln $x^2 + y^2 = 5$, hyperbeln $3x^2 - 2y^2 = 10$, och deras skärningspunkter.

Som sista steg kan vi subtrahera den andra ekvationen från den första, vilket ger

$$\begin{cases} x^2 &= 4, \\ y^2 &= 1. \end{cases}$$

Detta ekvationssystem har alltså exakt samma lösningar som det vi startade med, och vi kan se att lösningarna är $x = \pm 2$ och $y = \pm -1$. Det ger oss de fyra punkterna $(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$, som alltså är cirkelns och hyperbelns skärningspunkter.

▲

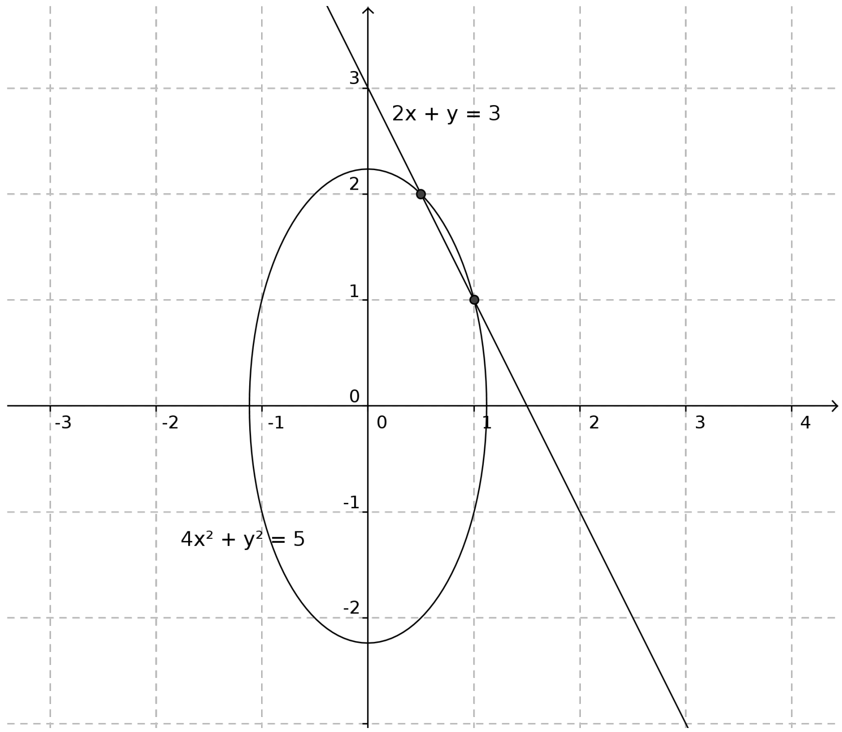
En annan metod är att lösa ut en av variablerna från den ena ekvationen, och sätta in uttrycket i den andra.

Exempel 4.2.2. Vi ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y &= 3, \\ 4x^2 + y^2 &= 5. \end{cases}$$

Den första ekvationen beskriver en rät linje, och den andra en ellips. Vi börjar med att lösa ut y i den första ekvationen. Det ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} y &= 3 - 2x, \\ 4x^2 + y^2 &= 5. \end{cases}$$



Figur 4.2: Linjen $2x + y = 3$, ellipsen $4x^2 + y^2 = 5$, och deras skärningspunkter.

Vi sätter därefter in uttrycket vi fått för y i den andra ekvationen, vilket ger

$$\begin{cases} y &= 3 - 2x, \\ 4x^2 + (3 - 2x)^2 &= 5. \end{cases}$$

Den andra ekvationen kan förenklas till $2x^2 - 3x + 1 = 0$, vilken har de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = 1/2$. Vi sätter in dessa i den första ekvationen, och får $y_1 = 1$ och $y_2 = 2$. Detta ger oss de två punkterna $(1, 1)$ och $(1/2, 2)$, som alltså är linjens och ellipsens skärningspunkter.

▲

4.3 Skärningspunkter mellan cirklar och linjer

De punkter vi konstruerar med passare och linjal kan uppstå på tre olika sätt. Vi kan få skärningspunkter mellan två linjer, en linje och en cirkel, samt två cirklar. För att förstå strukturen hos de konstruerbara talen behöver vi ta fram koordinaterna för de skärningspunkter som uppstår i de tre olika fallen. Generellt sett krävs fyra punkter för att rita ut två linjer, en linje och en cirkel, eller två cirklar. Låt oss därför utgå ifrån fyra punkter $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ och (a_4, b_4), samt en kropp K som innehåller talen $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ och b_4.

4.3.1 Skärningen mellan två linjer

Låt säga att vi har två linjer som går genom punkterna (a_1, b_1) och (a_2, b_2), respektive (a_3, b_3) och (a_4, b_4). Vi utgår ifrån att de två linjerna verkligen är olika linjer. Om linjen som går genom (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är lodrät beskrivs den av ekvationen $x = a_1$. Om den andra linjen också är lodrät har de ingen skärningspunkt. Då den andra linjen inte är lodrät får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & = a_1, \\ (a_4 - a_3)(y - b_3) & = (b_4 - b_3)(x - a_3). \end{cases}$$

Här kan vi direkt substituera $x = a_1$ i den andra ekvationen, och få

$$y = \frac{(b_4 - b_3)(a_1 - a_3)}{(a_4 - a_3)} + b_3.$$

Vi kan här konstatera att y tillhör kroppen K, eftersom a_1, a_3, a_4, b_3 och b_4 tillhör K, och vi bara har använt de operationer som är tillåtna i en kropp. Även x tillhör kroppen K, eftersom $x = a_1$.

Vi har sett vad som händer om någon av linjerna är lodrät, så låt oss nu gå vidare till fallet då ingen av linjerna är lodräta. Då är alltså $a_2 - a_1 \neq 0$ och $a_4 - a_3 \neq 0$, och vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a_2 - a_1)(y - b_1) & = (b_2 - b_1)(x - a_1), \\ (a_4 - a_3)(y - b_3) & = (b_4 - b_3)(x - a_3). \end{cases}$$

Vi börjar med att multiplicera den första ekvationen med $a_4 - a_3$, och den andra med $a_2 - a_1$, vilket ger

$$\begin{cases} (a_2 - a_1)(a_4 - a_3)(y - b_1) & = (a_4 - a_3)(b_2 - b_1)(x - a_1), \\ (a_2 - a_1)(a_4 - a_3)(y - b_3) & = (a_2 - a_1)(b_4 - b_3)(x - a_3). \end{cases}$$

Nu har y samma koefficient i båda ekvationerna. När vi sedan subtraherar den första ekvationen från den andra kommer y att elimineras, och den andra ekvationen blir

$$(a_2-a_1)(b_4-b_3)(x-a_3)-(a_4-a_3)(b_2-b_1)(x-a_1) = (a_2-a_1)(a_4-a_3)(b_1-b_3).$$

Här kan nu x lösas ut som

$$x = \frac{(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)(b_1 - b_3) + a_3(a_2 - a_1)(b_4 - b_3) - a_1(a_4 - a_3)(b_2 - b_1)}{(a_2 - a_1)(b_4 - b_3) - (a_4 - a_3)(b_2 - b_1)},$$

förutsatt att

$$(a_2 - a_1)(b_4 - b_3) - (a_4 - a_3)(b_2 - b_1) \neq 0.$$

I fallet då

$$(a_2 - a_1)(b_4 - b_3) - (a_4 - a_3)(b_2 - b_1) = 0$$

saknas lösning för x. Att ekvationssystemet saknar lösning är samma sak som att de två linjerna saknar skärningspunkt, det vill säga linjerna är parallella.

Även här kan vi konstatera att $x \in K$. Vi kan enkelt se, om vi går tillbaka till ekvationssystemet och löser ut y, att även $y \in K$. De skärningspunkter som uppstår när två linjer skär varandra ger alltså alltid koordinater i samma kropp som vi startade med.

4.3.2 Skärningen mellan en linje och en cirkel

Låt säga att vi har en linje som går genom punkterna (a_1, b_1) och (a_2, b_2), samt en cirkel med centrum i (a_3, b_3) som går genom (a_4, b_4). Vi kan även här börja med att undersöka specialfallet då linjen är lodrät. Då får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x &= a_1, \\ (x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 &= (a_4-a_3)^2 + (b_4-b_3)^2. \end{cases}$$

När vi substituerar $x = a_1$ i den andra ekvationen får vi

$$(y-b_3)^2 = (a_4-a_3)^2 + (b_4-b_3)^2 - (a_1-a_3)^2.$$

Om högerledet är ett negativt tal finns det ingen reell lösning för y, vilket betyder att det saknas skärningspunkt. Om högerledet är icke-negativt får vi de två lösningarna

$$y = b_3 \pm \sqrt{(a_4-a_3)^2 + (b_4-b_3)^2 - (a_1-a_3)^2}$$

för y. Låt oss kalla det tal som står under rottecknet för α. Vi ser att α är ett element i K. Det är däremot inte säkert att y tillhör K, eftersom vi inte vet om $\sqrt{\alpha}$ tillhör K eller ej. Men om $\sqrt{\alpha}$ inte tillhör K kan vi i alla fall konstatera att y tillhör den kvadratiska utvidgningen $K(\sqrt{\alpha})$ av K.

Låt oss nu gå vidare till fallet då linjen inte är lodrät. För att hitta skärningspunkterna ska vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a_2-a_1)(y-b_1) &= (b_2-b_1)(x-a_1), \\ (x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 &= (a_4-a_3)^2 + (b_4-b_3)^2 \end{cases}$$

där $a_2 - a_1 \neq 0$. Vi löser ut y ur den första ekvationen som

$$y = \frac{(b_2-b_1)(x-a_1)}{a_2-a_1} + b_1.$$

Detta insatt i den andra ekvationen ger

$$(x-a_3)^2 + \left(\frac{(b_2-b_1)(x-a_1)}{a_2-a_1} + b_1 - b_3\right)^2 = (a_4-a_3)^2 + (b_4-b_3)^2.$$

Observera att detta är en andragradsekvation i x. Det är inte allt för svårt att inse att ekvationen kan skrivas på formen $Ax^2+Bx+C=0$, där koefficienterna A, B och C är tal i kroppen K. Uttrycket för A blir

$$A = \left(\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right)^2 + 1.$$

Eftersom den första termen är kvadraten av ett reellt tal, kan termen inte vara negativ. Därefter adderas 1, så vi kan konstatera att $A \neq 0$. Uttrycken för B och C blir ganska långa, och eftersom de exakta uttrycken inte är så viktiga här utelämnar vi dessa. Vi vet alltså, så här långt, att x-koordinaterna hos skärningspunkterna mellan linjen och cirkeln ges av de reella lösningarna till ekvationen $Ax^2 + Bx + C = 0$. Eftersom vi sett att $A \neq 0$ vet vi, enligt en känd formel, att lösningarna till andragradsekvationen ges av

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}}.$$

Låt $\alpha = \left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}$, och observera att båda α och $\frac{B}{2A}$ tillhör K. Om α är negativt saknar ekvationen reella lösningar, vilket betyder att det inte finns några skärningspunkter. I annat fall har vi en eller två reella lösningar för x. Dessa ligger antingen i K eller i en kvadratisk utvidgning $K(\sqrt{\alpha})$. Genom att sätta in lösningarna för x i (4.3.2) får vi motsvarande lösningar för y, vilka kommer att ligga i samma kropp som x.

I fallet då en linje skär en cirkel får vi alltså koordinater som ligger i kroppen K, eller i en kvadratisk utvidgning av denna.

Exempel 4.3.1. Låt säga att vi har en cirkel med centrum i $(1, 1)$, vilken går genom $(3, 0)$, och en linje som går genom punkterna $(4, -1)$ och $(-2, 3)$. Alla koordinaterna ligger i kroppen $\mathbb{Q}$. Cirkelns ekvation är

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2 + (-1)^2, \text{ eller förenklat } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

Linjens ekvation blir

$$-6(y+1) = 4(x-4), \text{ vilket också kan skrivas som } 2x + 3y = 5.$$

Vi ska alltså lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases}$$

Vi kan lösa ut

$$y = \frac{5 - 2x}{3}$$

från linjens ekvation. Insatt i cirkelns ekvation får vi

$$(x-1)^2 + \left(\frac{2-2x}{3}\right)^2 = 5,$$

vilket kan förenklas till

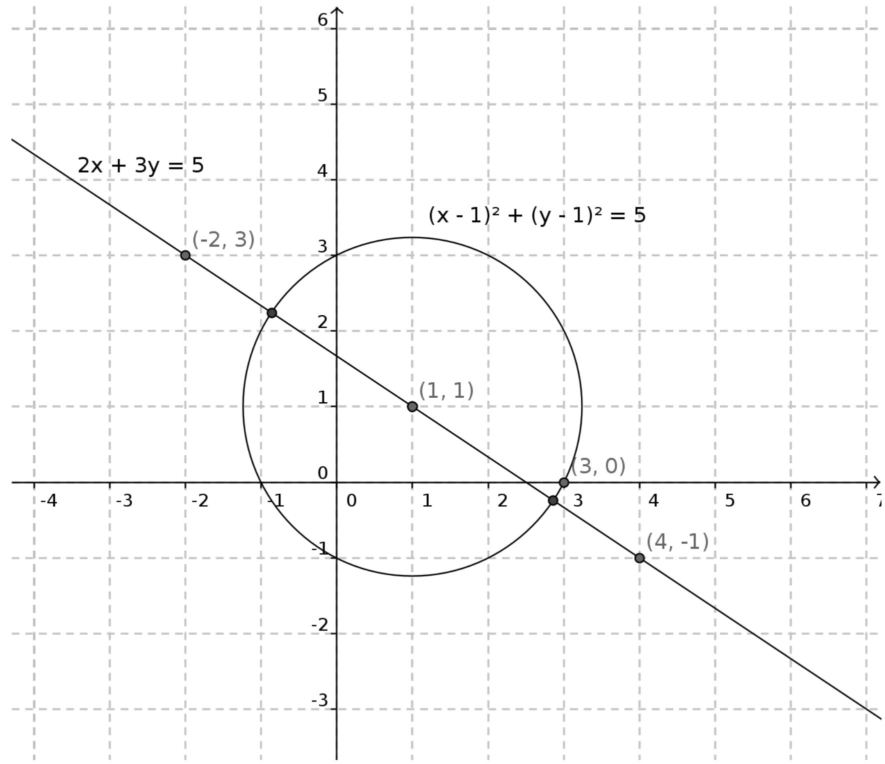
$$\frac{13}{9}(x-1)^2 = 5.$$

Vi får de två lösningarna

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{5 \cdot 9}{13}} = 1 + 3\sqrt{\frac{5}{13}}, \quad x_2 = 1 - 3\sqrt{\frac{5}{13}},$$

för x. Insättning i (4.3.1) ger de motsvarande lösningarna

$$y_1 = 1 - 2\sqrt{\frac{5}{13}}, \quad y_2 = 1 + 2\sqrt{\frac{5}{13}},$$



Figur 4.3: Cirkeln med centrum i $(1, 1)$ och som går genom $(3, 0)$, linjen som går genom $(4, -1)$ och $(-2, 3)$, och deras skärningspunkter.

för y. De två skärningspunkterna är alltså

$$\left(1+3\sqrt{\frac{5}{13}},\ 1-2\sqrt{\frac{5}{13}}\right) \text{ och } \left(1-3\sqrt{\frac{5}{13}},\ 1+2\sqrt{\frac{5}{13}}\right).$$

Talet $\sqrt{5/13}$ är inte rationellt, så koordinaterna hos dessa punkter ligger inte i $\mathbb{Q}$, men däremot i $\mathbb{Q}(\sqrt{5/13})$.

▲

4.3.3 Skärningen mellan två cirklar

Till sist ska vi också studera skärningen mellan två cirklar. Säg att vi har en cirkel med centrum i (a_1, b_1) som går genom (a_2, b_2), och en annan cirkel med centrum i (a_3, b_3) vilken går genom (a_4, b_4). Vi utgår från att de två cirklarna verkligen är olika cirklar. Vi söker då lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2 & =(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2, \\ (x-a_3)^2+(y-b_3)^2 & =(a_4-a_3)^2+(b_4-b_3)^2. \end{cases}$$

Om vi subtraherar den första ekvationen från den andra elimineras x^2- och y^2-termerna, och vi får

$$\begin{cases} (x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2, \\ 2(a_1-a_3)x+a_3^2-a_1^2+2(b_1-b_3)y+b_3^2-b_1^2= \\ \quad (a_4-a_3)^2+(b_4-b_3)^2-(a_2-a_1)^2-(b_2-b_1)^2. \end{cases}$$

Om både koefficienten för x och koefficienten för y i den andra ekvationen är noll innebär det att $a_1 = a_3$ och $b_1 = b_3$. Det vill säga, $(a_1, b_1) = (a_3, b_3)$, så de båda cirklarna har samma centrum, och saknar därmed skärningspunkter. Antag istället att koefficienten för y inte är noll. Då kan vi lösa ut y som

$$y = \frac{2(a_3 - a_1)x + (a_4 - a_3)^2 + (b_4 - b_3)^2 - (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 + a_1^2 - a_3^2 + b_1^2 - b_3^2}{2(b_1 - b_3)}.$$

När vi sätter in detta i den första ekvationen får vi en andragradsekvation i x. Med samma resonemang som i avsnitt 4.3.2 får vi att x och y, om lösningar existerar, tillhör K eller en kvadratisk utvidgning av K. Om vi skulle ha koefficienten 0 för y, men en nollskild koefficient för x i den andra ekvationen löser vi i stället ut x, och sätter in uttrycket i den första ekvationen. Detta ger oss i stället en andragradsekvation för y, vilket leder fram till samma slutsats.

Vi har nu bevisat följande.

Hjälpsats 4.3.2. *Låt P vara en mängd av punkter med koordinater i en kropp K. Säg att vi använder dessa punkter för att med passaren och linjalen rita ut antingen två linjer, en linje och en cirkel, eller två cirklar. De skärningspunkter som då kan uppstå har sina koordinater i K eller i en kvadratisk utvidgning av K.*

4.4 Strukturen hos kroppen av konstruerbara tal

De konstruktioner vi såg i Kapitel 2 gick ut på att använda de skärningspunkter mellan cirklar och linjer som uppstår för att rita nya cirklar och linjer, upprepade gånger. Det som beskrivs i Hjälpsats 4.3.2 är bara ett steg i en sådan konstruktion. I allmänhet kan vi alltså behöva använda upprepade kvadratiska utvidgningar för att beskriva en kropp som innehåller de tal vi konstruerat.

Exempel 4.4.1. Låt ℓ vara den linje som går genom origo och punkten $(1, 1)$. Låt C_1 vara cirkeln med centrum i origo, och som går genom $(1, 0)$. Talen 0 och 1 är ju rationella, så låt oss utgå från kroppen $\mathbb{Q}$. Linjen ℓ har ekvationen $y = x$, och C_1 ekvationen $x^2 + y^2 = 1$. Vi får därför ekvationssystemet

$$\begin{cases} y &= x, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

Vi sätter in $y = x$ i den andra ekvationen, och får att $2x^2 = 1$, det vill säga $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Eftersom $y = x$ får vi de två skärningspunkterna

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \text{ och } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Koordinaterna som vi nu fått ligger i den kvadratiska utvidgningen $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ av $\mathbb{Q}$. Låt oss nu rita en cirkel C_2 med centrum i $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, och som går genom origo. Vi vill nu bestämma skärningspunkterna mellan C_1 och C_2, vilket betyder att vi ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1, \\ \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 1. \end{cases}$$

Om vi utvecklar den andra ekvationen, och därefter subtraherar den första får vi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1, \\ -\frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{2} &= 0 \end{cases}$$

Vi löser ut y från den andra ekvationen som

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}}x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - x.$$

För att förenkla insättningen av y i den första ekvationen, låt oss först beräkna y^2. Vi får

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}.$$

När vi nu sätter in detta i ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ får vi

$$2x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 1.$$

Denna andragradsekvation har lösningarna

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4} \pm \sqrt{\frac{6}{16}} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} \pm \sqrt{6}).$$

Från (4.4.1) får vi motsvarande lösningar för y, vilket i sin tur ger oss skärningspunkterna

$$\left(\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6}),\ \frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})\right), \text{ och } \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6}),\ \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right),$$

mellan cirklarna C_1 och C_2. Dessa koordinater ligger inte i K, utan i den kvadratiska utvidgningen $K(\sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$. ▲

Sats 4.4.2. *Låt a vara ett konstruerbart tal. Då finns en kedja av kroppar*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$$

där K_i är en kvadratisk utvidgning av K_{i-1}, för varje $i = 1, \ldots, n$, och $a \in K_n$.

Anmärkning 4.4.3. Kroppen K_n är alltså en upprepad kvadratisk utvidgning och kan uttryckas på formen $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$, så som i Definition 3.2.5.

Kom ihåg att $\mathbb{Q}$ är en delkropp till varje kropp av reella tal. Kedjan startar alltså i den minsta möjliga kroppen.

Bevis. Eftersom a är ett konstruerbart tal är $(a, 0)$ en konstruerbar punkt. Kom ihåg att vi utgår från enbart de två punkterna $(0, 0)$ och $(1, 0)$, så $(a, 0)$ kan konstrueras i ett ändligt antal steg från dessa två punkter. Det finns alltså en serie av punkter $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_m$, med $p_m = (a, 0)$, som vi konstruerar för att nå punkten $(a, 0)$. Mer formellt kan vi säga att, för varje $i = 1, 2, \ldots, m$ gäller att p_i är en skärningspunkt mellan två linjer, en linje och en cirkel, eller två cirklar som ritas ut med hjälp av passaren och linjalen och punkter ur mängden

$$\{(0,0),(1,0),p_0,p_1\ldots,p_{i-1}\}.$$

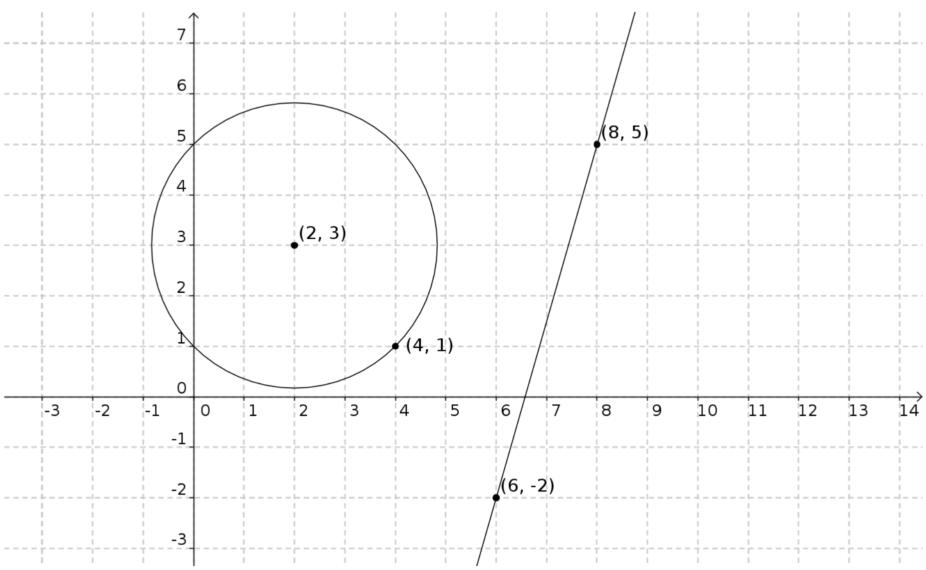
För att konstruera p_0 används alltså bara punkterna $(0,0)$ och $(0,1)$. De koordinater som förekommer här är alltså bara 0 och 1, och vi vet att dessa tal tillhör $\mathbb{Q}$. Det följer av Hjälpsats 4.3.2 att p_0's koordinater ligger i en kropp K, som antingen är $\mathbb{Q}$ eller en kvadratisk utvidgning av $\mathbb{Q}$. För att konstruera p_1 får vi använda punkterna $(0,0),(1,0)$ och p_0. Dessa punkter har sina koordinater i K, så enligt Hjälpsats 4.3.2 har p_1 sina koordinater i K eller en kvadratisk utvidgning av K. Vi fortsätter på samma sätt för $p_2,p_3,\ldots,p_m$. Vi kan kalla den första kvadratiska utvidgningskroppen för K_1, nästa för K_2, och så vidare. Detta ger oss en kedja av kroppsutvidgningar

$$\mathbb{Q}=K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_n$$

där a ligger i den sista kroppen K_n. □

Övningar

Övning 4.1 (⋆). Bilden nedan visar en cirkel och en linje. Ange deras ekvationer.



Övning 4.2 (⋆). Rita upp de cirklar och linjer som beskrivs av ekvationerna nedan.

(i) $-2(y+1)=6(x-3)$

(ii) $2y=-3x+1$

(iii) $(x-9)^2+(y-5)^2=9$

(iv) $x^2+2x+y^2+2y=-1$

Övning 4.3 (⋆). Ange ekvationen för den cirkel som går genom punkterna $(-1,0)$ och $(3,0)$, och har arean 4π.

Övning 4.4 ($\star\star\star$). Beräkna koordinaterna för centrum hos den cirkel som går genom punkterna $(5, 3)$, $(7, 5)$ och $(8, 2)$. Beräkna även radien, och ange cirkelns ekvation.

Övning 4.5 ($\star\star$). Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y &= x + 1, \\ 2y &= 2x + 5, \end{cases}$$

eller visa att lösning saknas. Rita också upp en figur.

Övning 4.6 ($\star\star$). Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + y &= -2, \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 &= 8, \end{cases}$$

eller visa att lösning saknas. Rita också upp en figur.

Övning 4.7 ($\star\star$). Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 16, \\ (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 4, \end{cases}$$

eller visa att lösning saknas. Rita också upp en figur.

Övning 4.8 ($\star\star$). Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x+5)^2 + (y+5)^2 &= 100, \\ (x+5)^2 + (y+5)^2 &= 1, \end{cases}$$

eller visa att lösning saknas. Rita också upp en figur.

Övning 4.9 ($\star\star\star$). Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 &= 5, \\ (x-5)^2 + (y-7)^2 &= 17, \\ y &= kx + m. \end{cases}$$

Ge exempel på reella värden för k och m så att ekvationssystemet ...

(i) ... har exakt en lösning,

(ii) ... har exakt två lösningar,

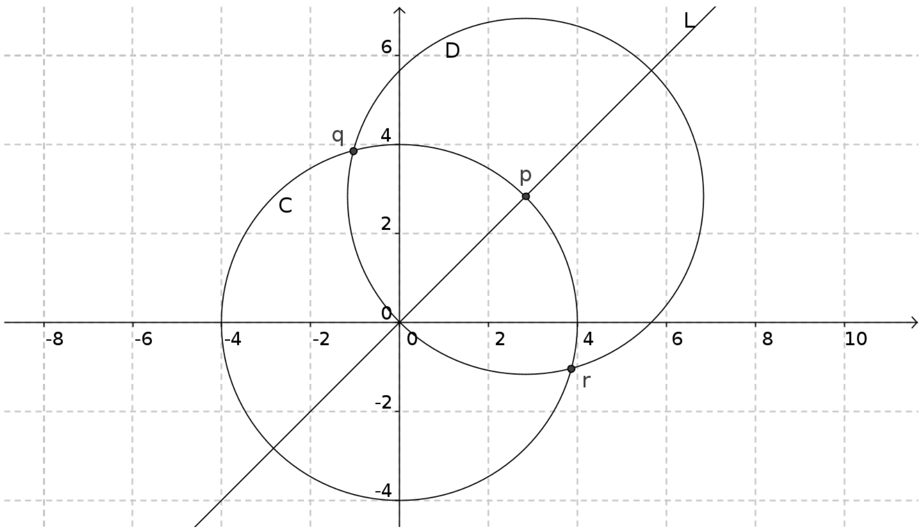
(iii) ... har exakt tre lösningar,

(iv) ... har exakt fyra lösningar,

(v) ... saknar lösningar,

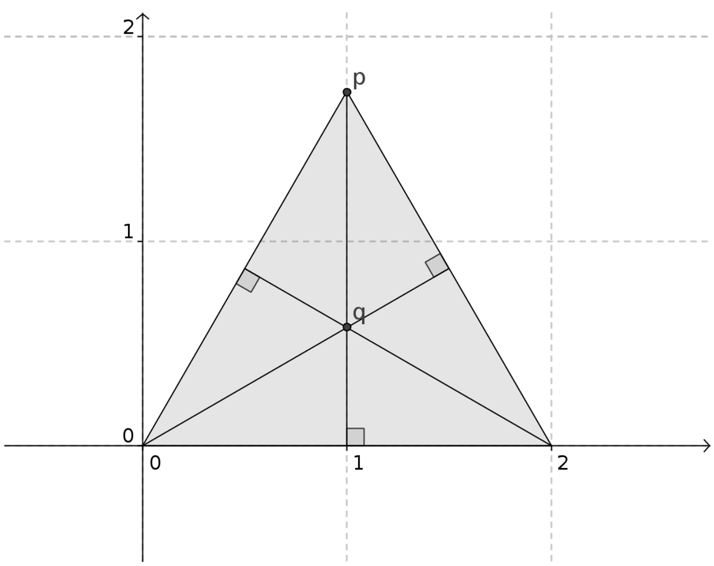
eller förklara varför ett sådant exempel inte existerar.

Övning 4.10 ($\star\star\star$)**.** Låt C vara en cirkel med centrum i origo och radie 4. Låt L vara linjen som ges av ekvationen $y = x$. Cirkeln C och linjen L skär varandra i en punkt p i första kvadranten. Låt D vara cirkeln med centrum i p, vilken går genom origo. Cirklarna C och D har två skärningspunkter q och r.



Beräkna koordinaterna för punkterna q och r. Genom att göra en eller flera kvadratiska kroppsutvidgningar av $\mathbb{Q}$ kan vi få en kropp som innehåller dessa koordinater. Ange en sådan kropp.

Övning 4.11 ($\star\star\star$)**.** Bilden nedan visar en liksidig triangel. Beräkna koordinaterna för punkterna p och q.



Observera att dessa punkter kan konstrueras med passare och linjal, givet punkterna triangelns nedre hörn $(0, 0)$ och $(2, 0)$. Koordinaterna ligger i en kropp som kan fås genom en eller flera kvadratiska utvidgningar av $\mathbb{Q}$. Beskriv en sådan kropp.

5 Något om talteori

I detta kapitel kommer vi att helt lämna geometrin för att istället bekanta oss med talteori, vilket är den gren av matematiken som främst handlar om heltalen och deras egenskaper. Anledningen till att vi gör denna avstickare är att resultat från detta kapitel kommer behövas för att bevisa en sats om rötter till heltalspolynom i nästa kapitel. Den sistnämnda satsen kommer i sin tur spela en viktigt roll i beviset av att det är omöjligt att tredela vinkeln och dubblera kuben.

5.1 Delbarhet

Låt n och $m > 0$ vara två heltal. Betrakta den oändliga mängden

$$A = \{\dots, n-2m, n-m, n, n+m, n+2m, \dots\}$$

och låt r vara det minsta icke-negativa heltalet i A[3]. Från vår definition av r följer det att det finns ett heltal k sådant att

$$r = n - km,$$

eller ekvivalent uttryckt

$$n = km + r.$$

Vi påstår nu att r måste uppfylla den dubbla olikheten

$$0 \leqslant r < m.$$

Till att börja med noterar vi att olikheten $0 \leqslant r$ är uppfylld per definition av r. I avsikt att härleda en motsägelse antar vi nu att det inte gäller att $r < m$, det vill säga vi antar att $m \leqslant r$. Detta innebär att $r - m$ är ett icke-negativt tal som är mindre än r och som ligger i mängden A. Det är en motsägelse eftersom vi valt r till att vara det minsta icke-negativa talet i A. Således var vårt antagande att $m \leqslant r$ falskt, vilket innebär att $r < m$. Talen k och r ovan kallas i detta sammanhang för kvot respektive rest. Det vi har visat ovan är att vi kan utföra *division med rest*, vilket vi formulerar som en sats:

Sats 5.1.1. *Låt n och $m > 0$ vara två heltal. Då finns det heltal k och r sådana att*

$$n = km + r$$

och

$$0 \leqslant r < m.$$

Vi illustrerar denna grundläggande sats med ett enkelt exempel:

[3]En av de mest grundläggande egenskaperna hos heltalen är att en mängd av heltal som innehåller minst ett icke-negativt tal alltid innehåller ett *minsta* icke-negativt tal.

Exempel 5.1.2.

$$7 = 2 \times 3 + 1$$
$$-23 = (-5) \times 5 + 2.$$

▲

Om talen m och n är sådana att resten r i Sats 5.1.1 är lika med noll, är det av särskild betydelse. Följande definition behandlar just denna situation.

Definition 5.1.3. Om d och n är två heltal sådana att det finns ett tredje heltal k sådant att $n = dk$, säger vi att d är en *delare* till n. Detta kan vi även uttrycka som att d delar n.

Exempel 5.1.4. 2 delar 6, ty $6 = 2 \cdot 3$. ▲

Exempel 5.1.5. För alla heltal n gäller det att ± 1 delar n och att $\pm n$ delar n. Läsaren ombeds verifiera detta i Övning 5.5. ▲

5.2 Primtal och relativt prima tal

Exempel 5.1.5 visar att varje heltal n är delbart med ± 1 och $\pm n$. De heltal större än ett som endast har dessa delare spelar en viktigt roll i matematiken och kallas för *primtal*.

Definition 5.2.1. Ett heltal $p > 1$ är ett primtal om p inte har några delare förutom 1 och p.

Exempel 5.2.2. Följande tal är exempel på primtal:

$$2, 3, 5, 7, 11.$$

▲

Nästa definition behandlar ett koncept som är besläktat med primtal, och som kommer att spela en viktigt roll senare i denna kurs.

Definition 5.2.3. Om m och n är två tal som saknar gemensamma delare förutom talen -1 och 1 och om åtminstone något av dem inte är lika med noll, sägs m och n vara *relativt prima*.

Exempel 5.2.4. Talen 4 och 9 är relativt prima, ty de har inga gemensamma delare förutom ± 1. Däremot är 4 och 8 inte relativt prima, då de båda är delbara med 2. ▲

Vi ska nu bevisa ett specialfall av en mycket användbar sats inom talteorin, nämligen Bézouts identitet. I detta bevis får vi användning av resultatet i Sats5.1.1.

Sats 5.2.5. *Två heltal m och n är relativt prima om och endast om det finns heltal x och y sådana att*

$$mx + ny = 1. \tag{5.1}$$

Bevis. Anta först att det finns heltal x och y så att ekvation (5.1) är uppfylld. Det är klart att åtminstone något av talen m och n måste vara skilt från noll. Anta vidare att d är en gemensam delare till m och n. Då gäller det att

$$dk_1x + dk_2y = 1,$$

för några heltal k_1 och k_2, vilket är ekvivalent med

$$d(k_1x + k_2y) = 1.$$

Den senaste likheten kan bara vara sann om $d = \pm 1$ och därmed är m och n relativt prima.

Låt oss nu istället anta att m och n är relativt prima. Vi ska bevisa att det finns heltal x och y så att ekvation (5.1) är uppfylld. Betrakta mängden

$$A = \{mx + ny \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Låt d vara det minsta *positiva* heltalet i A. Vi ska använda oss av ett motsägelsebevis för att bevisa att d måste dela varje tal i A. Antag att det finns ett tal $a \in A$ sådant att d inte delar a. Division med rest ger då att

$$a = dk + r,$$

där k och r är heltal och $0 < r < d$. Det följer från Övning 5.4 att $r \in A$, men detta är en motsägelse eftersom $r < d$ och d per definition är det minsta positiva heltalet i A. Därmed drar vi slutsatsen att d delar alla tal i A. Eftersom m och n är element i A, delar d både m och n. Enligt antagande är m och n relativt prima och således gäller det att $d = 1$, vilket implicerar att $1 \in A$. Per definition av mängden A är beviset därmed slutfört. □

Exempel 5.2.6. Vi konstaterade tidigare att 4 och 9 är relativt prima. Sats 5.2.5 medför därför att

$$1 = a \cdot 4 + b \cdot 9,$$

för några heltal a, b. Detta är inte särskilt svårt att inse, vi kan till exempel ta $a = -2$ och $b = 1$. ▲

Vi avslutar detta kapitel med några satser som vi kommer att behöva i nästa kapitel.

Sats 5.2.7. *Låt m och n vara två relativt prima heltal. Om k är ett heltal sådant att m delar nk så är m en delare till k.*

Bevis. Enligt Sats 5.2.5 finns det heltal x, y sådana att

$$mx + ny = 1. \tag{5.2}$$

Eftersom m delar nk så finns det även ett heltal l sådant att

$$ml = nk.$$

Multiplikation av ekvation (5.2) med k ger

$$mxk + nyk = k.$$

I vänsterledet i den senaste ekvationen kan vi byta ut nk mot ml och sedan bryta ut m, vilket ger

$$m(xk + ly) = k.$$

Detta innebär per definition att m delar k. □

Sats 5.2.8. *Om m och n respektive m och k är relativt prima, så är även m och nk relativt prima.*

Bevis. Sats 5.2.5 förser oss med heltal x_1, y_1, x_2, y_2 så att

$$\begin{aligned} mx_1 + ny_1 &= 1 \\ mx_2 + ky_2 &= 1. \end{aligned}$$

Produkten av vänster- respektive högerleden i ekvationerna ovan är lika med varandra. Detta ger

$$m \cdot (mx_1x_2 + ny_1x_2 + kx_1y_2) + nk \cdot y_1y_2 = 1,$$

vilket enligt Sats 5.2.5 medför att m och nk är relativt prima. □

Följdsats 5.2.9. *Om m och n är relativt prima heltal och s är ett positivt heltal så är m och n^s relativt prima.*

Bevis. Sats 5.2.8 ger att m och $n \cdot n = n^2$ är relativt prima. På samma sätt får vi att m och $n \cdot n^2$ är relativt prima. Genom att fortsätta att använda Sats 5.2.8 på detta vis inser vi att m och n^s är relativt prima för alla positiva heltal s. □

Övningar

Övning 5.1 ($\star$)**.** Lista alla delare till följande heltal:

(i) 4

(ii) 5

(iii) -14.

Är något eller några av talen ovan primtal?

Övning 5.2 ($\star\star$)**.** Vilka av följande par av heltal är relativt prima?

(i) 2 och 4

(ii) 2 och 2

(iii) 2 och 1

(iv) 1 och 1.

Övning 5.3 ($\star\star\star$)**.** Antag att m, n, k är heltal sådana att n och mk är relativt prima. Måste det då gälla att även n och m är relativt prima?

Övning 5.4 ($\star\star$)**.** Låt m och n vara heltal och betrakta mängden

$$A = \{mx + ny \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Visa att A är sluten under subtraktion, det vill säga att $a - b \in A$ om $a, b \in A$.

Övning 5.5 ($\star$)**.** Bevisa att varje heltal n är delbart med ± 1 och $\pm n$.

Övning 5.6 ($\star$)**.** Låt $x = 100000000123$ och $y = 200000000237$. Bevisa att x och y är relativt prima.

Övning 5.7 ($\star\star$)**.** Låt p vara ett primtal och låt n vara ett heltal sådant att p inte delar n. Visa att p och n är relativt prima.

Övning 5.8 ($\star\star\star$)**.** Låt p vara ett primtal och låt n och m vara heltal sådana att p delar nm. Visa att p delar åtminstone något av n och m.

6 Något om polynom

Den sista matematiska pusselbiten vi saknar, innan vi kan bevisa att kubens dubblering och vinkelns tredelning i allmänhet är omöjliga att genomföra, är teorin om polynom. Detta kapitel utgörs av en genomgång av den teori som vi behöver.

6.1 Definition av polynom

Definition 6.1.1. Ett *polynom* $p(x)$ i variabeln x med koefficienter i en kropp K är en summa på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

där $n \geqslant 0$ är ett heltal och $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$. Om alla så kallade koefficienter $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är heltal så säger vi att polynomet är ett *heltalspolynom*. Om α är ett tal, inte nödvändigtvis i K, sådant att

$$p(\alpha) = p(x) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

sägs α vara en *rot* till $p(x)$. Slutligen definierar vi *graden* av ett nollskilt polynom som det största heltal d sådant att $a_d \neq 0$.

Exempel 6.1.2. Exempel på polynom med koefficienter i kroppen av reella tal av grad $2, 0$ och 5 är $p_1(x) = x^2 - 3$, $p_2(x) = 1$ och $p_3(x) = -3x^5 + \pi x^3$. Vi kan även även addera och multiplicera polynom med varandra. Till exempel har vi att

$$\begin{aligned} p_1(x) + p_2(x) &= x^2 - 3 + 1 \\ &= x^2 - 2 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} p_1(x) \cdot p_3(x) &= (x^2 - 3)(-3x^5 + \pi x^3) \\ &= -3x^7 + \pi x^5 + 9x^5 - 3\pi x^3 \\ &= -3x^7 + (\pi + 9)x^5 - 3\pi x^3. \end{aligned}$$

▲

6.2 Några satser om rötter till polynom

Sats 6.2.1 (Faktorsatsen)**.** *Låt*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

vara ett nollskilt polynom av grad d med koefficienter i en kropp K och antag att α är ett element i K. Då är α en rot till $p(x)$ om och endast om det finns ett polynom $q(x)$ av grad $d-1$ med koefficienter i K så att

$$p(x) = (x - \alpha) q(x). \tag{6.1}$$

Bevis. Vi antar först att det finns ett polynom $q(x)$ av grad $d-1$ med koefficienter i K så att ekvation (6.1) är uppfylld. Då ser vi direkt att α är en rot till $p(x)$, eftersom $p(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$.

Vi antar nu istället att α är en rot till $p(x)$. Vi börjar med det enklaste specialfallet, nämligen fallet då $\alpha = 0$. Det medför att $a_0 = 0$ och därmed får vi

$$\begin{aligned} p(x) &= x(a_n x^{n-1} + a_n x^{n-2} + \cdots + a_1) \\ &= (x-\alpha)q(x), \end{aligned}$$

där $q(x) = a_n x^{n-1} + a_n x^{n-2} + \cdots + a_1$ har grad $d-1$. Låt nu roten α vara ett godtyckligt element i K och betrakta polynomet

$$\hat{p}(x) = p(x+\alpha).$$

Eftersom $\alpha \in K$, har $\hat{p}(x)$ koefficienter i K. Vidare gäller det att

$$\hat{p}(0) = p(\alpha) = 0,$$

och vi får därför enligt ovan att

$$\hat{p}(x) = xq(x),$$

för något polynom $q(x)$ med koefficienter i K av grad $d-1$. Detta ger att

$$p(x) = \hat{p}(x-\alpha) = (x-\alpha)\hat{q}(x),$$

där $\hat{q}(x) = q(x-\alpha)$ är ett polynom med koefficienter i K av samma grad som $q(x)$, det vill säga $d-1$. □

Följdsats 6.2.2. *Låt $p(x)$ vara ett nollskilt polynom av grad d med koefficienter i en kropp K. Låt $n \leqslant d$ och låt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vara n stycken olika element i K. Alla dessa tal är rötter till $p(x)$ om och endast om det finns ett polynom $q(x)$ av grad $d-n$ med koefficienter i K så att*

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)q(x).$$

Bevis. Beviset är lämnat åt läsaren i Övning 6.1. □

Exempel 6.2.3. Vi illustrerar här faktorsatsen med ett exempel. Låt

$$p(x) = x^3 - 1.$$

Detta polynom har talet 1 som en rot, eftersom $p(1) = 1^3 - 1 = 0$. Faktorsatsen medför därför att det finns ett polynom $q(x)$ av grad 2 sådant att

$$p(x) = (x-1)q(x).$$

Vi påstår att

$$q(x) = x^2 + x + 1$$

gör jobbet, ty

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2+x+1) &= x^3 + x^2 + 1 - x^2 - x - 1 \\ &= x^3 - 1. \end{aligned}$$

▲

Nästa sats ger oss ett användbart verktyg för att hitta rötter till heltalspolynom.

Sats 6.2.4. *Antag att ett heltalspolynom*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

har en rationell rot $\frac{r}{s}$, sådan att r och s är relativt prima. Då gäller det att r delar a_0 och att s delar a_n.

Bevis. Att $\frac{r}{s}$ är en rot till polynomet i fråga betyder per definition att

$$a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicerar vi den senaste likheten med s^n får vi

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0,$$

vilket är ekvivalent med

$$r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} s + \cdots + a_1 s^{n-1}) = -a_0 s^n.$$

Således är r en delare till $a_0 s^n$. Följdsats 5.2.9 och Sats 5.2.7 ger därför tillsammans att r delar a_0. Vi lämnar till läsaren att i Övning 6.3 visa att s delar a_n. $\square$

Sats 6.2.1 och Sats 6.2.4 ger tillsammans ett sätt att hitta rötter till (och därmed faktorisera) vissa polynom.

Exempel 6.2.5. Betrakta polynomet

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2. \tag{6.2}$$

Låt oss se efter om $p(x)$ har några rationella rötter. Enligt Sats 6.2.4 gäller det att om ett maximalt förkortat bråk $\frac{r}{s}$ är en rot till $p(x)$, så måste r dela 2 och s dela 1. Det ger att de enda möjliga rötterna till $p(x)$ är ± 1 och ± 2. Vi testar därför om dessa tal är rötter till $p(x)$:

$$\begin{aligned}
p(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0 \\
p(-1) &= (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 2 = 0 \\
p(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0 \\
p(-2) &= (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - (-2) + 2 = -12.
\end{aligned}$$

Vi har funnit att ± 1 och 2 är rötter till $p(x)$. Följdsats 6.2.2 ger därför att

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)q(x), \tag{6.3}$$

där $q(x)$ är ett polynom av grad $3 - 3 = 0$, det vill säga ett konstant polynom. Det finns därför ett tal c sådant att $q(x) = c$. Från ekvation (6.3) ser vi att x^3-koefficienten i $p(x)$ är lika med c. Samtidigt visar ekvation (6.2) att denna term även är lika med 1, och det följer att $c = 1$. Slutligen har vi alltså funnit att

$$p(x) = (x-1)(x+1)(x-2).$$

▲

Vi avslutar detta avsnitt med ytterligare två satser om rötter till polynom. Dessa sammankopplar det vi lärt oss om polynom med teorin om konstruerbara tal

Sats 6.2.6. *Låt $p(x)$ vara ett polynom med koefficienter i en kropp K och låt $K(\sqrt{\alpha})$ vara en kvadratisk utvidgning av K. Om $\beta \in K(\sqrt{\alpha})$ är en rot till $p(x)$, så är även $\overline{\beta}$ en rot till $p(x)$.*

Bevis. Antag att

$$p(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Eftersom β är en rot till $p(x)$ så har vi

$$a_n \beta^n + a_n \beta^{n-1} + \cdots + a_1 \beta + a_0 = 0.$$

Upprepade användningar av Hjälpsats 3.2.8 ger

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{0} \\
&= \overline{a_n \beta^n + a_n \beta^{n-1} + \cdots + a_1 \beta + a_0} \\
&= \overline{a_n \beta^n} + \overline{a_n \beta^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 \beta} + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n}\,\overline{\beta^n} + \overline{a_n}\,\overline{\beta^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\beta} + \overline{a_0} \\
&= a_n \overline{\beta}^n + a_n \overline{\beta}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{\beta} + a_0 \\
&= p(\overline{\beta}).
\end{aligned}$$

Därmed är $\overline{\beta}$ en rot till $p(x)$. □

Sats 6.2.7. *Om ett kubiskt polynom*

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{6.4}$$

med rationella koefficienter inte har några rationella rötter, så har det inte heller några konstruerbara rötter.

Bevis. Vi kommer att använda oss av ett motsägelsebevis. Vi antar därför att $p(x)$ inte har några rationella rötter, men att $p(x)$ har åtminstone en konstruerbar rot. Låt oss, i kraft av Sats 4.4.2, välja en konstruerbar rot β till $p(x)$, ett positivt heltal n och positiva tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ som uppfyller följande egenskaper

(i) Den upprepade kvadratiska utvidgningen $K_n = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$ innehåller β.

(ii) n är det minsta positiva heltalet med egenskapen att det finns en rot β' till $p(x)$ och positiva tal $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ sådana att $\beta' \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha'_1}, \ldots, \sqrt{\alpha'_n})$.

Antag att $\beta = a + b\sqrt{\alpha_n}$, där $a, b \in K_{n-1} = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_{n-1}})$. Enligt Sats 6.2.6 är $\overline{\beta} = a - b\sqrt{\alpha_n}$ en rot till $p(x)$. Vi noterar nu att $\beta \notin K_{n-1}$, ty om $\beta \in K_{n-1}$ skulle det strida mot punkt (ii) ovan. Enligt Hjälpsats 3.2.8 är därför $\overline{\beta} \neq \beta$. Nu kan vi använda oss av Följdsats 6.2.2 som ger att

$$p(x) = (x - \beta)(x - \overline{\beta})q(x), \tag{6.5}$$

för något polynom $q(x)$ med koefficienter i K_n av grad $3 - 2 = 1$. Det finns således $c, d \in K_n$ sådana att $q(x) = cx + d$. Från ekvation (6.5) inser vi att x^3-koefficienten i $p(x)$ är c, men från ekvation (6.4) följer det att samma koefficient är lika med 1. Därmed är $c = 1$ och $q(x) = x + d$. Med beteckningen $\gamma = -d$ gäller det då att

$$p(x) = (x - \beta)(x - \overline{\beta})(x - \gamma). \tag{6.6}$$

Från ekvation (6.6) ser vi att γ är en rot till $p(x)$. Genom att multiplicera ut parenteserna i högerledet i denna ekvation får vi att x^2-koefficienten i $p(x)$ är lika med $-\gamma - \beta - \overline{\beta}$. Ekvation (6.4) ger att x^2-koefficienten i $p(x)$ även är lika med a_2. Vi har alltså att $a_2 = -\gamma - \beta - \overline{\beta}$, vilket är ekvivalent med $\gamma = -\beta - \overline{\beta} - a_2$. Övning 6.5 visar att det innebär att $\gamma \in K_{n-1}$, vilket återigen strider mot punkt (ii). Därmed måste vårt antagande att det finns en konstruerbar rot vara falskt och beviset är därför klart. □

Övningar

Övning 6.1 ($\star\star$)**.** Bevisa Följdsats 6.2.2.

Övning 6.2 ($\star\star\star$)**.** Bevisa att ett nollskilt polynom med koefficienter i en kropp K av grad d kan ha maximalt d stycken olika rötter.

Övning 6.3 ($\star$)**.** Slutför beviset av Sats 6.2.4.

Övning 6.4 ($\star\star$)**.** Betrakta polynomet

$$p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x + x - 2.$$

Hitta alla rötter till $p(x)$ och skriv $p(x)$ som en produkt av tre polynom av grad 1 och ett polynom av grad 0.

Övning 6.5 ($\star$)**.** Med beteckningar som i beviset av Sats 6.2.7, bevisa att

$$-\beta - \overline{\beta} - a_2 \in K_{n-1}.$$

Övning 6.6 ($\star\star$)**.** Är antagandet att p och q är relativt prima nödvändigt för att Sats 6.2.4 ska vara sann?

Övning 6.7 ($\star\star$)**.** Låt α vara ett element i en kropp K, och låt A vara mängden av polynom med koefficienter i K. Låt B vara delmängden

$$B = \{p(x) \in A \mid \alpha \text{ är en rot till } p(x)\}.$$

Bevisa att

(i) Om $p(x), q(x) \in B$, så gäller det att $p(x) + q(x) \in B$.

(ii) Om $p(x) \in B$ och $r(x) \in A$, så gäller det att $p(x)r(x) \in B$.

7 Omöjliga konstruktioner

7.1 Kubens fördubbling

Olösligheten hos kubens fördubbling är värd att formulera som en sats.

Sats 7.1.1 (Kubens fördubbling)**.** *Givet sidan av en kub är det inte möjligt att konstruera sidan av en kub vars volym är den dubbla.*

Bevis. Låt oss konstruera ett koordinatsystem sådant att sidlängden av den ursprungliga sidan är lika med 1 och låt a vara sidlängden av den dubblerade kuben. Eftersom volymen av en kub är dess sidlängd i kubik gäller det således att

$$a^3 = 2 \cdot 1^3,$$

eller med andra ord att

$$a = \sqrt[3]{2}.$$

Om kubens fördubbling vore möjlig skulle alltså $\sqrt[3]{2}$ vara ett konstruerbart tal. Vi ska visa att $\sqrt[3]{2}$ inte är konstruerbart, och det gör vi genom att visa att polynomet

$$p(x) = x^3 - 2$$

inte har några konstruerbara rötter. Enligt Sats 6.2.7 räcker det att visa att $p(x)$ inte har några rationella rötter. För att visa detta kan vi använda oss av Sats 6.2.4 som i det här fallet säger att om ett maximalt förkortat bråk $\frac{r}{s}$ vore en rot till $p(x)$, så måste r dela -2 och q dela 1. Sammantaget ger detta att de enda möjliga rationella rötterna till $p(x)$ är ± 1 och ± 2. Vi testar nu om något av dessa fyra tal är en rot till $p(x)$:

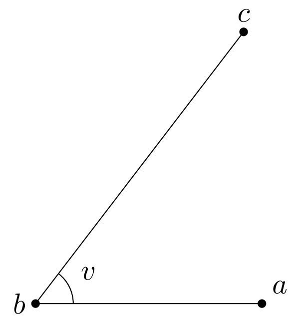
$$\begin{aligned} p(1) &= 1^3 - 2 = -1 \\ p(-1) &= (-1)^3 - 2 = -3 \\ p(2) &= 2^3 - 2 = 6 \\ p(-2) &= (-2)^3 - 2 = -10. \end{aligned}$$

Tydligen var inget av talen ± 1 eller ± 2 en rot till $p(x)$. Vi har därmed visat att $p(x)$ inte har några rationella rötter, vilket medför att $\sqrt[3]{2}$ inte är ett konstruerbart tal. Det vill säga, vi kan inte konstruera sidan av kuben med dubbel volym. □

7.2 Vinkelns tredelning

Vi inleder med att formulera olösligheten hos vinkelns tredelning som en sats.

Sats 7.2.1 (Vinkelns tredelning)**.** *Det är i allmänhet inte möjligt att utifrån en given vinkel konstruera en ny vinkel vars storlek är en tredjedel av den ursprungliga vinkelns storlek.*



Figur 7.1: Definition av konstruerbar vinkel.

Anmärkning 7.2.2. Sats 7.2.1 säger inte att det är omöjligt att tredela varje vinkel, till exempel kan ju vinkeln 180° tredelas, eftersom vi vet att vi kan konstruera liksidiga trianglar, vari vinklarna ju är $180°/3 = 60°$. Vi såg även i Övning 2.2 att en rät vinkel kan tredelas. Vad satsen säger är att det finns *minst* en vinkel som inte kan tredelas.

Vi vill nu förtydliga vad vi menar med att en viss vinkel är konstruerbar. Eftersom vi redan vet vad det innebär att punkt är konstruerbar, kan vi återföra definitionen av en konstruerbar vinkel på definitionen av en konstruerbar punkt.

Definition 7.2.3. En vinkel v är konstruerbar om det finns tre konstruerbara punkter a, b och c sådana att vinkeln abc är lika med v. Se Figur 7.1.

Precis som i fallet med kubens dubblering vill vi översätta problemet med vinkelns tredelning från geometrins språk till algebrans dito. För att göra detta behöver vi några resultat från det område av matematiken som kallas för trigonometri. Två centrala begrepp inom trigonometrin är sinus och cosinus, som definieras i Appendix A.

Följande två hjälpsatser utgör nyckeln till ett algebraiskt bevis av Sats 7.2.1.

Hjälpsats 7.2.4. *För alla vinklar v gäller det att*

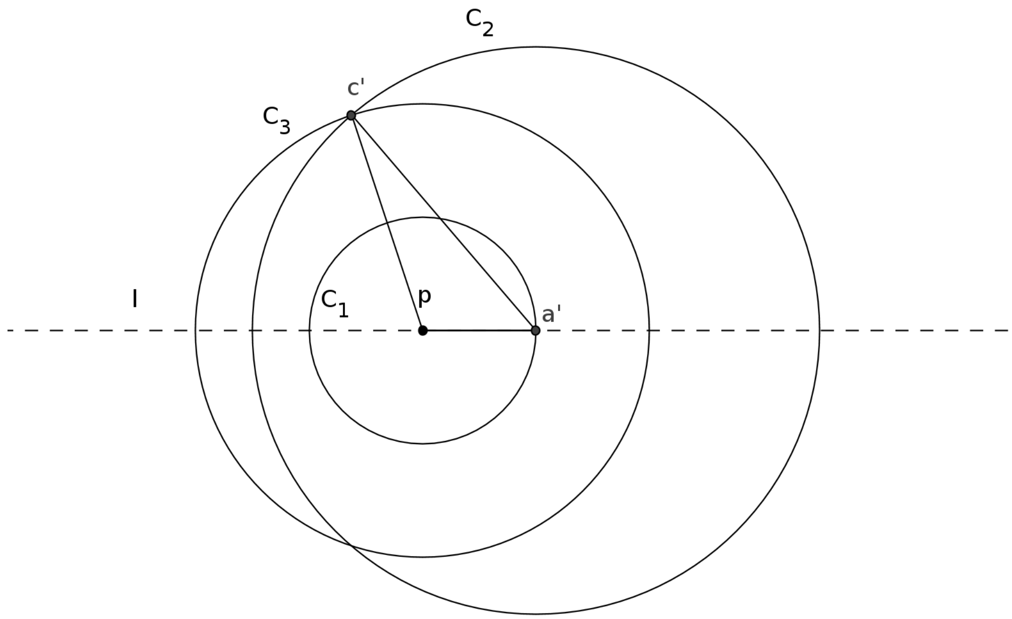
$$\cos 3v = 4(\cos v)^3 - 3\cos v.$$

Bevis. Se Appendix A. □

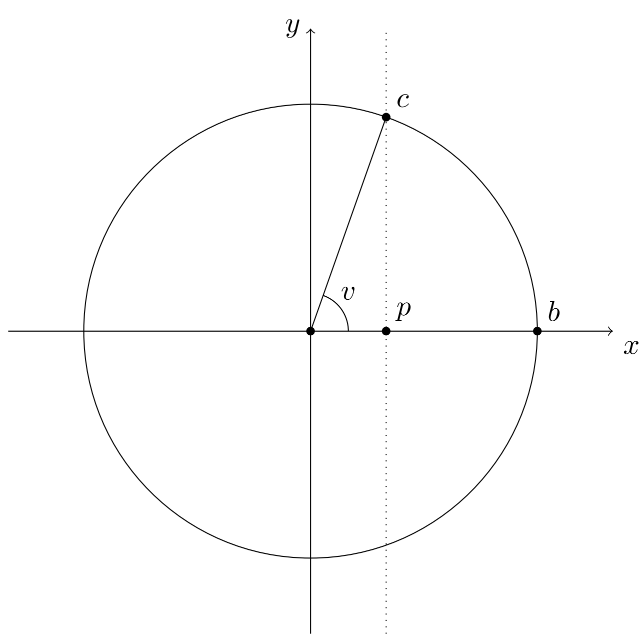
Hjälpsats 7.2.5. *En vinkel v är konstruerbar om och endast om $\cos v$ är ett konstruerbart tal.*

För att kunna bevisa Hjälpsats 7.2.5 behöver vi påminna oss om Sats 2.1.15. Vi passar även på att bevisa denna.

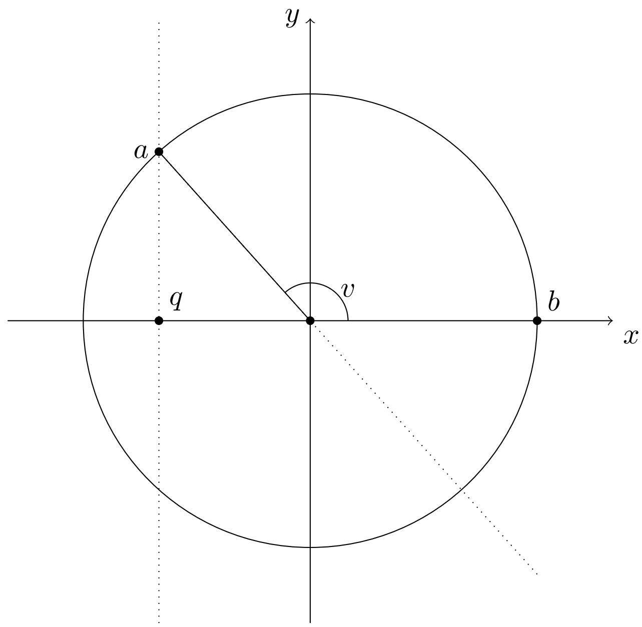
Sats 2.1.15 *Givet en vinkel och en linje kan vi, från en given punkt på linjen, dra ytterligare en linje så att vinkeln mellan linjerna är samma som den givna vinkeln.*



Figur 7.2: Illustration av beviset av Sats 2.1.15.



Figur 7.3



Figur 7.4

Bevis av Sats 2.1.15. Givet är en linje l, en punkt p på linjen och en vinkel abc. Med hjälp av Sats 2.1.2 kan vi rita cirkeln C_1 med centrum i p och radie samma längd som ba. Låt a' vara en skärningspunkt mellan l och C_1. Vi kan även rita en cirkel C_2 med centrum i a' och radie ac. Dessutom kan vi rita en cirkel C_3 med centrum i p och radie bc. Låt c' vara en skärningspunkt mellan C_2 och C_3. Betrakta nu de två trianglarna med hörn i a, b och c, respektive a', p, c'. Sidorna överensstämmer i längd, så enligt Sats 2.1.8 överensstämmer även vinklarna. Speciellt är abc och $a'pc'$ lika stora. Se även Figur 7.2. $\square$

Bevis av Hjälpsats 7.2.5. Antag först att $\cos v$ är ett konstruerbart tal. Per definition betyder det att punkten $p = (\cos v, 0)$ är konstruerbar. Sats 2.1.11 visar att vi kan konstruera linjen som är vinkelrät mot x-axeln och som går genom p. Därför kan vi också konstruera skärningspunkterna (alternativt skärningspunkten) mellan denna linje och enhetscirkeln. Låt c vara en sådan punkt. Från Figur 7.3 framgår att c har egenskapen att boc är lika med v, där $o = (0, 0)$ och $b = (0, 1)$. Detta betyder att v är konstruerbar.

Antag nu istället att v är en konstruerbar vinkel. Sats 2.1.15 låter oss flytta denna vinkel på så vis att boa är lika med v, där $o = (0, 0)$, $b = (0, 1)$ och a är en konstruerbar punkt. Vi använder oss av Sats 2.1.11 eller Sats 2.1.12 för att rita linjen som går genom a och som är vinkelrät mot x-axeln. Slutligen markerar vi skärningspunkten q mellan denna linje och x-axeln och noterar att $q = (\cos v, 0)$. Eftersom q är konstruerbar är $\cos v$ konstruerbart. Se även Figur 7.4. $\square$

Nu är vi redo för beviset av det omöjliga i att tredela vinkeln, som är mycket likt beviset för att kubens fördubbling är omöjlig.

Bevis av Sats 7.2.1. Sats 2.1.1 visar hur vi kan konstruera en liksidig triangel med en sida lika med en given sträcka. Eftersom varje vinkel i en sådan triangel är lika med $60°$, följer det att $60°$ är konstruerbar. Notera att det betyder att om vi kan konstruera vinkeln $v = \frac{60°}{3} = 20°$ utifrån vinkeln $60°$, så är v en konstruerbar vinkel. Vi ska dock visa att vinkeln v inte är konstruerbar, vilket enligt Hjälpsats 7.2.5 är ekvivalent med att $\cos 20°$ inte är ett konstruerbart tal. Vår strategi är att använda Hjälpsats 7.2.4, som säger att

$$\cos 3v = 4(\cos v)^3 - 3\cos v.$$

Exempel A.0.2 visar att $\cos 60° = \frac{1}{2}$, varför ovanstående ekvationen medför att

$$\frac{1}{2} = 4(\cos v)^3 - 3\cos v,$$

vilket vi efter några några omstuvningar även kan uttrycka som att $\cos v$ är en rot till polynomet

$$p(x) = x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}.$$

För att visa att $\cos v$ inte är konstruerbart räcker det därför enligt Sats 6.2.7 att visa att $p(x)$ inte har några rationella rötter. Definiera nu heltalspolynomet

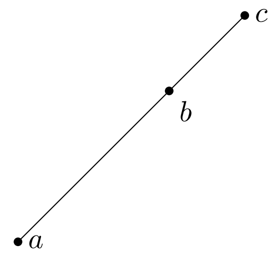
$$q(x) = 8p(x) = 8x^3 - 6x - 1.$$

Polynomen $q(x)$ och $p(x)$ har samma uppsättning rötter, och därför har vi nu reducerat problemet till att visa att $q(x)$ inte har några rationella rötter. Sats 6.2.4 medför att de enda möjliga rationella rötterna till $q(x)$ är $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}$ och $\pm\frac{1}{8}$, men en insättning av dessa värden i $q(x)$ visar att ingen av dem är en rot. Polynomet $q(x)$ har således ingen rationell rot och beviset är därmed klart. □

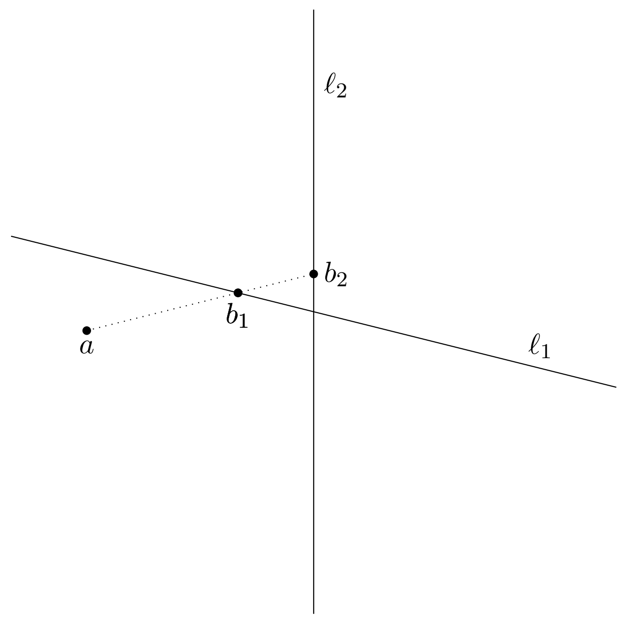
7.3 Den graderade linjalen

I det föregående avsnittet såg vi att det är omöjligt att tredela vinkeln och dubblera kuben enbart med hjälp av passare och linjal. Det betyder inte att det är omöjligt att genomföra dessa konstruktioner om man får använda fler verktyg. I detta avsnitt ska vi bevisa att det går att tredela en godtycklig vinkel om vi får ta hjälp av en så kallad *graderad linjal*, vilket är en linjal med två markeringar placerade med avstånd ett ifrån varandra. Notera att eftersom den endast har två markeringar, kan den graderade linjalen inte användas för att mäta avståndet mellan två godtyckliga punkter. Med den graderade linjalen kan vi istället till exempel, givet två punkter a och b, rita en punkt c sådan att a, b och c ligger på en linje och sådan att avståndet från b till c är lika med ett. Se Figur 7.5. Denna konstruktion kan vi dock utföra även med passare och linjal, även om det i så fall krävs fler konstruktionssteg.

En konstruktion vi kan utföra med hjälp av den graderade linjalen, men som inte kan göras med passare och linjal, är följande. Låt en punkt a, samt två



Figur 7.5

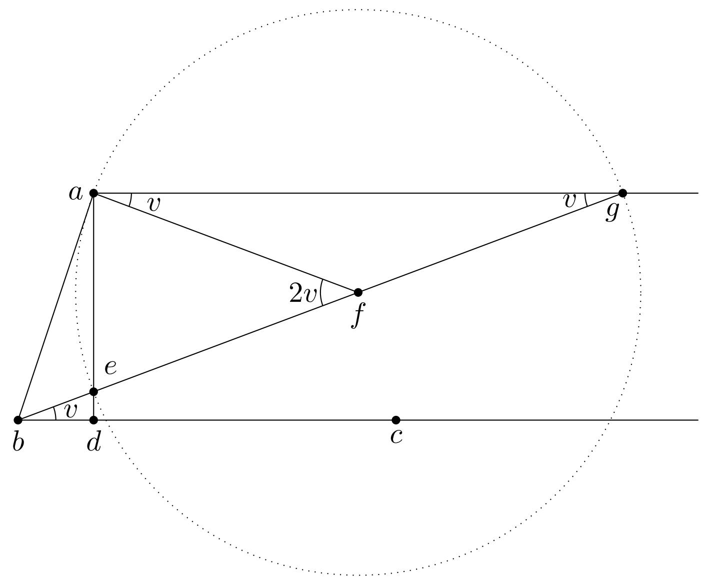


Figur 7.6

icke-parallella linjer ℓ_1 och ℓ_2 vara givna. Då kan vi med den graderade linjalens hjälp konstruera två punkter b_1 och b_2 sådana att b_1 ligger på ℓ_1, b_2 ligger på ℓ_2, avståndet mellan b_1 och b_2 är ett och sådana att a, b_1 och b_2 ligger på en linje. Se Figur 7.6.

Den senast presenterade konstruktionen möjliggör vinkelns tredelning enligt följande. Låt den spetsiga vinkeln cba vara given[4]. Antag att avståndet mellan b och a är $\frac{1}{2}$, det vill säga hälften av avståndet mellan den graderade linjalens markeringar. Vårt mål är att konstruera en vinkel vars storlek är en tredjedel av den givna vinkeln. Konstruera linjen som är vinkelrät mot sträckan bc och som passerar genom a, samt linjen som är parallell med bc och som passar genom a. Se Figur 7.7. Med hjälp av den graderade linjalen kan vi sedan konstruera punkterna e och g på så vis att b, e och g ligger på en linje och så att avståndet mellan e och g är ett. Konstruera sedan mittpunkten av eg och kalla den f. Således gäller det att ef och fg båda har längd $\frac{1}{2}$. Vi noterar nu att vinklarna

[4]Det är även möjligt att tredela en trubbig vinkel med hjälp av den graderade linjalen, men vi nöjer oss med att behandla det spetsiga fallet.



Figur 7.7

cba och agb är lika stora. Låt oss kalla denna vinkelstorlek för v. Det följer från resultatet i Övning 7.1 att vår konstruktion hitintills medför att även af har längd $\frac{1}{2}$. Eftersom fg och fa är lika stora, är vinkeln gaf lika med fga, som är lika med v. Det följer att bfa är lika med $2v$. Då ab och af är lika stora, är vinkeln fba lika med bfa, det vill säga $2v$. Således är den ursprungliga vinkeln cba lika med $3v$, som vi följaktligen lyckats tredela.

Vi har härmed bevisat följande.

Sats 7.3.1. *Varje given vinkel kan tredelas med den graderade linjalen.*

7.4 Vilka regelbundna n-hörningar kan konstrueras?

Vi avslutar detta kapitel med kort diskussion om vilka regelbundna n-hörningar som kan konstrueras med passare och linjal. Vi vet sedan tidigare att en regelbunden trehörning, det vill säga en liksidig triangel, är konstruerbar. Det är också klart att en regelbunden fyrhörning, det vill säga en kvadrat, är konstruerbar. Vidare visar Övning 2.11 och Övning 7.2 att även en regelbunden femhörning respektive sexhörning kan konstrueras. Här bryts dock sviten. En regelbunden sjuhörning är inte konstruerbar. Beviset för detta är inte särskilt svårt, men något invecklat och utelämnas därför här. Det är dock enklare att bevisa att den regelbundna 9-hörningen inte är konstruerbar. Beviset för detta är lämnat åt läsaren i övningarna.

Kanske ställer sig läsaren nu frågan i titeln till detta avsnitt:

Vilka regelbundna n-hörningar kan konstrueras?

För att besvara frågan behöver vi gå tillbaka till ämnet för Kapitel 5, nämligen talteori.

Definition 7.4.1. *Fermattalen* ges av

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ett Fermattal som också är ett primtal kallas för ett *Fermatprimtal*.

Det finns fem kända Fermatprimtal:

$$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65536.$$

Vi vet fortfarande inte om det finns fler Fermatprimtal än dessa fem, men vi vet att det finns Fermattal som inte är primtal. Så är fallet till exempel med F_5.

Följande sats, vars bevis inte ryms inom ramarna för denna kurs, relaterar konstruerbarhet av regelbundna n-hörningar till Fermatprimtalen.

Sats 7.4.2 (Gauss-Wentzels sats)**.** *Låt n vara ett heltal större än två och låt d vara den största udda delaren till n. En regelbunden n-hörning är konstruerbar om och endast om d är lika med 1 eller en produkt av olika Fermatprimtal.*

Å ena sidan visar Sats 7.4.2 exakt vilka regelbundna n-hörningar som är konstruerbara, men å andra sidan säger denna sats oss inte hela sanningen, eftersom vi ännu inte vet vilka tal som är Fermatprimtal.

Övningar

Övning 7.1 ($\star\star$)**.** Låt abc vara en rätvinklig triangel med hypotenusan ac. Bevisa att b ligger på cirkeln med diameter ac.

Ledning: Resultatet i Övning 2.7 kan vara användbart.

Övning 7.2 ($\star$)**.** Bevisa att det är möjligt att konstruera en regelbunden sexhörning med passare och linjal.

Ledning: Sats 2.1.15 kan vara användbar.

Övning 7.3 ($\star\star$)**.** Bevisa att en regelbunden niohörning kan konstrueras med passare och graderad linjal, men inte med passare och (ograderad) linjal.

Ledning: Sats 2.1.15 kan vara användbar.

Övning 7.4 ($\star\star$)**.** Vi har sett att det är omöjligt att, givet sidan av en kub, konstruera sidan av en kub med dubbelt så stor volym. Men är det möjligt att konstruera sidan av en kub med fem gånger så stor volym? Åtta gånger så stor volym?

Övning 7.5 ($\star\star$)**.** Antag att vi har två linjer ℓ_1 och ℓ_2 som varken är parallella eller vinkelräta. Konstruera en tredje linje som är vinkelrät mot ℓ_1, *enbart* med hjälp av den graderade linjalen.

Ledning: Satserna 2.1.5, 2.1.9, 2.1.19 och 2.1.13 kan vara användbara.

Övning 7.6 ($\star\star$). Använd Sats 7.4.2 för att avgöra om den regelbundna n-hörningen är konstruerbar för följande värden på n.

- $n = 56$
- $n = 51$
- $n = 1542$
- $n = 360$

Lösningar till udda övningsuppgifter

Övning 1.1. (i) $\{-2, 2\}$

(ii) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

(iii) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Övning 1.3. Påståendena är (i), (iii) och (v), varav (iii) och (v) är sanna.

Övning 1.5. (i) Nej. Talet -3 finns i den första mängden, men inte i den andra.

(ii) Ja, båda är mängden $\{-3, 3\}$.

(iii) Ja, båda är mängden av udda heltal. För varje heltal x har vi $2x - 1 = 2(x - 1) + 1$, där ju även $x - 1$ är ett heltal.

(iv) Ja. Eftersom $x^2 = (-x)^2$ får vi alla heltalskvadrater genom att ta kvadraterna av alla heltal $x \geq 0$. Det har ingen betydelse att alla tal i den första mängden (utom 0), "räknas upp dubbelt".

(v) Nej. Till exempel finns talen -5 och -3 i den första mängden, men inte i den andra.

Övning 1.7. Alla talen är element i M. Vi ska nu visa att vart och ett av dem kan skrivas på formen $x + \sqrt{2}y$, där x och y är rationella tal.

Vi har

$$0 = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 \text{ och } 0 \text{ tillhör } \mathbb{Q},$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{7}\sqrt{2} = \frac{3}{5} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{7}, \text{ där } \frac{3}{5} \text{ och } \frac{1}{7} \text{ tillhör } \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{2} - 1 = -1 + \sqrt{2} \cdot 1, \text{ där } -1 \text{ och } 1 \text{ tillhör } \mathbb{Q},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}, \text{ där } 0 \text{ och } \frac{1}{2} \text{ tillhör } \mathbb{Q},$$

$$\sqrt{2} = 0 + \sqrt{2} \cdot 1, \text{ där } 0 \text{ och } 1 \text{ tillhör } \mathbb{Q},$$

$$1 = 1 + \sqrt{2} \cdot 0, \text{ där } 0 \text{ och } 1 \text{ tillhör } \mathbb{Q}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1 \; somviredansett \text{tillhör} M.$$

Övning 1.9. Ett bevis får genom att göra några mindre ändringar i beviset av Sats 1.2.4.

Om $\sqrt{3}$ vore rationell skulle vi ha $\sqrt{3} = a/b$, för heltal a och b. Låt oss därför anta att $\sqrt{3} = a/b$, för att se att detta leder fram till en motsägelse. Vi kan anta att a/b är ett maximalt förkortat bråk. Vi har

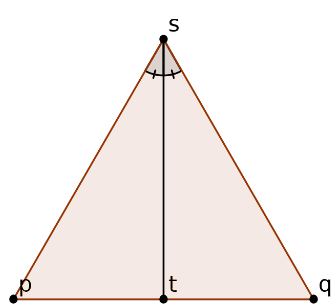
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3, \text{ vilket vi också kan skriva som } a^2 = 3b^2.$$

Heltalet $3b^2$ är delbart med 3, så även a^2 måste vara delbart med 3. Om a inte är delbar med 3 är inte heller a^2 det. I det här fallet måste alltså a vara delbar med 3, det vill säga $a = 3c$, där c är ett heltal. Vi har nu $3^2c^2 = 3b^2$, och det följer att $3c^2 = b^2$. Enligt samma resonemang som tidigare för a, följer nu att även b är delbar med 3, och vi kan skriva $b = 3d$ för något heltal d. Nu har vi

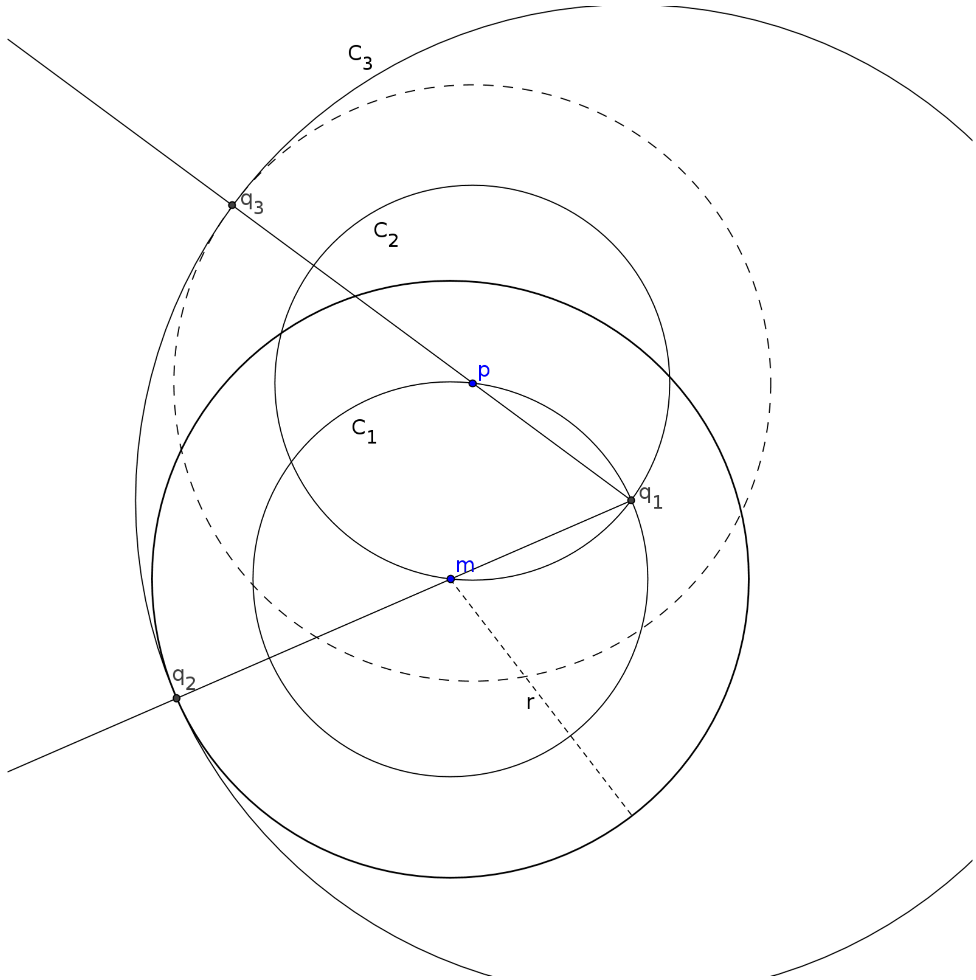
$$\frac{a}{b} = \frac{3c}{3d}.$$

Detta bråk kan förkortas med 3, vilket ju motsäger att a/b skulle vara ett maximalt förkortat bråk. Vårt resonemang, som grundade sig i att $\sqrt{3}$ skulle vara ett rationellt tal har alltså lett fram till en motsägelse. Vi kan nu dra slutsatsen att $\sqrt{3}$ inte är ett rationellt tal.

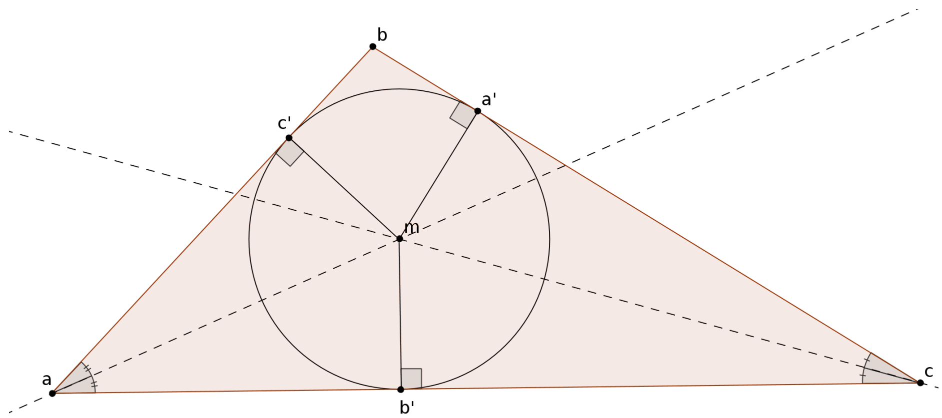
Övning 2.1. Vi har alltså en linje med ändpunkter som vi kan kalla p och q, och vi vill konstruera den punkt på linjen som ligger precis mitt emellan p och q. Enligt Sats 2.1.1 kan vi konstruera en liksidig triangel med hörn i p och q. Kalla det tredje hörnet s. Använd nu Sats 2.1.9 för att dela vinkeln vid psq i två. Då får vi en linje som skär den ursprungliga linjen i en punkt t, som vi ska bevisa är mittpunkten mellan p och q. Betrakta de två trianglarna med hörn i p, t och s, respektive q, t och s. Dessa delar en sida. Vi vet också att sidan ps är lika lång som sidan qs. Dessutom vet vi att vinklarna pst och tsq är lika. Det följer av Sats 2.1.4 att även sträckan pt är lika lång som qt. Det betyder att t är mittpunkten mellan p och q.



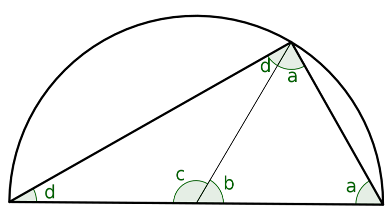
Övning 2.3. Bilden nedan visar konstruktionen då punkten p ligger inuti den givna cirkeln.



Övning 2.5. Låt oss kalla triangelns hörn för a, b och c. Vi börjar med att rita ut en linje som går genom a, och delar vinkeln i två lika stora delar. Låt oss även göra på samma sätt vid c. De två linjerna skär varandra i en punkt m inuti triangeln. Dra nu tre olika linjer, sådana att var och en av går genom m och är vinkelrät mot en av triangelns sidor. Kalla de tre skärningspunkterna med triangelns sidor för a', b' och c', som i figuren. Vi vill nu bevisa att a', b' och c' alla ligger på exakt samma avstånd från m. Låt oss betrakta två trianglar; den med hörn i m, a och b', samt den med hörn i m, a och c'. Dessa två trianglar är rätvinkliga med samma hypotenusa. Vi vet även att vinkeln vid hörnet a är samma hos de båda trianglarna, eftersom båda är hälften av vinkeln hos den stora triangeln. Enligt Sats 2.1.16 innebär det att avståndet från m till b' är samma som från m till c'. Betrakta nu triangeln med hörn i m, c och b', samt triangeln med hörn i m, c och a'. Det följer med samma resonemang som innan att b' och a' ligger på samma avstånd från m. Nu kan vi rita ut en cirkel som har centrum i m, och går genom a', b' och c'. Från Övning 2.4 följer det att cirkeln kommer att tangera triangelns sidor i just dessa punkter.



Övning 2.7. Börja med att markera mittpunkten på halvcirkelns bas. Dra en linje från denna punkt till triangelns övre hörn, så att triangeln delas in i två trianglar. Observera att de två nya trianglarna är likbenta, eftersom två av benen i vardera triangel är cirkelns radie. Detta innebär enligt Sats 2.1.8 att även två av vinklarna i vardera triangel är lika. Låt oss namnge de olika vinklarna med a, b, c och d, som i figuren.



Enligt Sats 2.1.13 och Sats 2.1.19 är

$$\begin{aligned} 2a + b &= 180^\circ, \\ 2d + c &= 180^\circ, \\ c + b &= 180^\circ. \end{aligned}$$

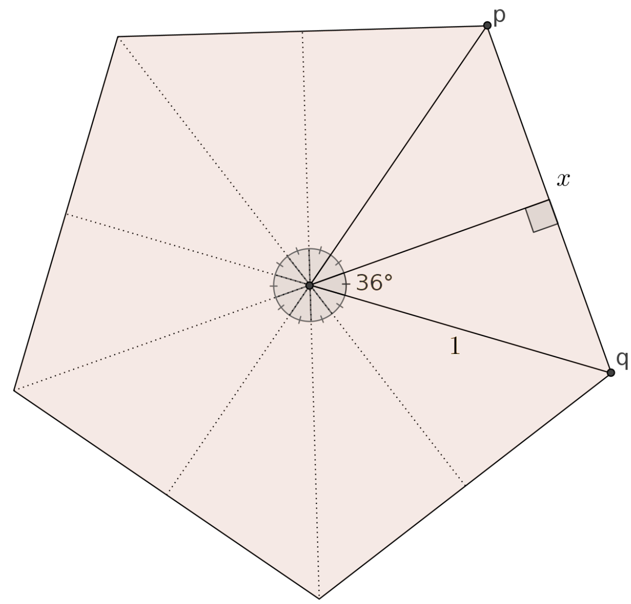
Det följer att

$$2a + 2d = (2a + b) + (2d + c) - (c + b) = 180^\circ + 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ,$$

så $a+d = 90^\circ$. Eftersom $a+d$ utgör en av vinklarna i den ursprungliga triangeln är beviset färdigt.

Övning 2.9. Säg att vi har två punkter på avstånd r från varandra. Vi kan då rita en cirkel med radie r, med centrum i en av punkterna. Därefter kan vi använda Sats 2.1.2 för att rita en cirkel med radie r och centrum i origo. Denna cirkel skär x-axeln i punkten $(r, 0)$. Vi har då bevisat att r är ett konstruerbart tal.

Övning 2.11. (i) Vi utgår alltså ifrån en regelbunden pentagon, där hörnen ligger på en cirkel med radie 1. Låt x vara längden av pentagonens sida. Vi vill alltså beräkna värdet av x. Välj ut två närliggande hörn i pentagonen, och kalla dessa p och q. Linjen mellan p och q ska alltså vara en sida i pentagonen. Markera cirkelns mittpunkt, och dra två linjer från mittpunkten till p och q. (Observera att vi inte jobbar med geometrisk konstruktion med passare och linjal i den här deluppgiften, även om detta faktiskt är en möjlig konstruktion. Linjerna som ritas ut nu är endast menade som hjälp i beräkningen.) Dra också en linje från mittpunkten, till den punkt på pentagonens sida som ligger precis mitt emellan p och q. På så sätt bildas två rätvinkliga trianglar, se figur nedan.



Låt oss studera en (valfri) av dessa trianglar. Vi vet att triangelns hypotenusa är 1, och att vinkeln vid hörnet som också är cirkelns mittpunkt är $360°/10 = 36°$. Enligt definitionen av sinus har vi sambandet

$$\sin(36°) = \frac{x}{2}.$$

Om vi kan beräkna värdet av $\sin(36°)$ får vi alltså också värdet av x. Vi har

$$\sin(36°) = \sin\left(\frac{72°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(72°)}{2}}$$

enligt ((i)). Enligt ((i)) får vi då

$$\sin(36°) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{4-(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Det följer att

$$x = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

vilket alltså är längden av pentagonens sida.

(ii) Vi låter alltså p vara skärningspunkten mellan C och den positiva y-axeln. För att kunna beräkna avståndet från p till $(1,0)$ behöver vi veta y-koordinaten för p, som vi kan kalla y_p. Vi börjar med att beräkna radien av cirkeln C. Denna beräknas med hjälp av Pythagoras sats till

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Det följer då att y-koordinaten för p är

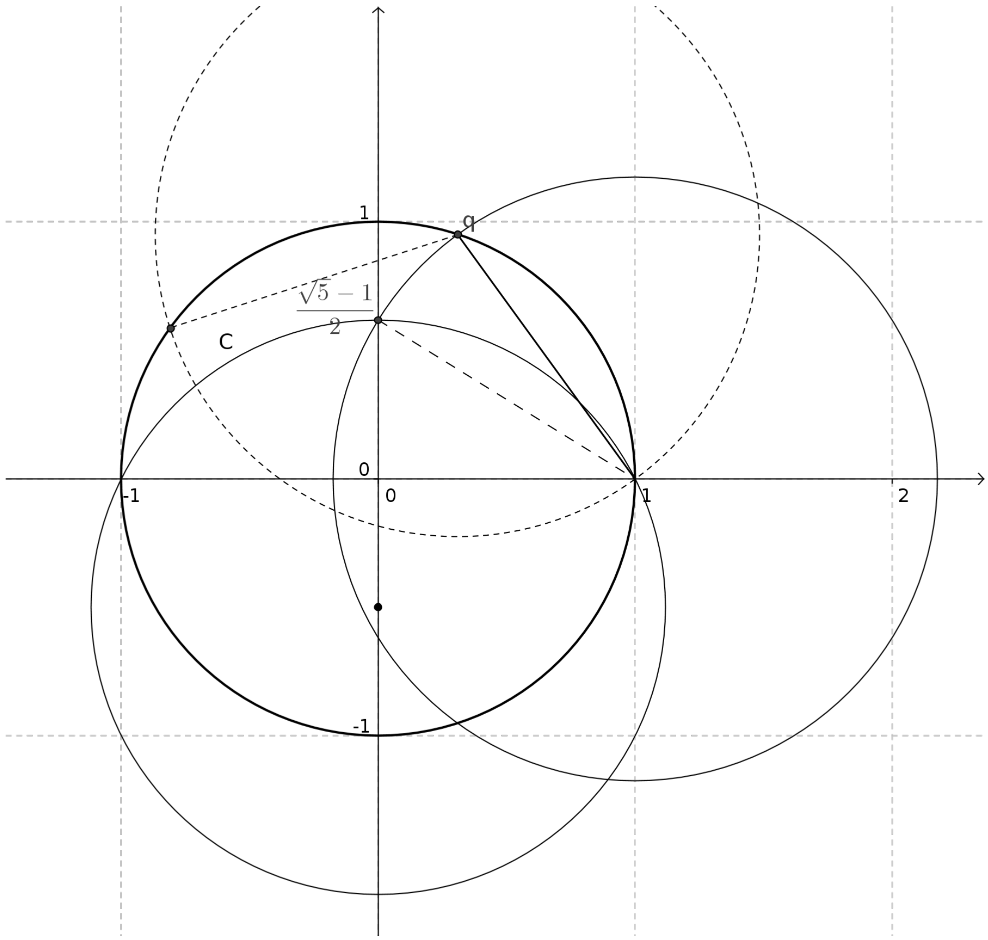
$$y_p = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vi kan nu beräkna avståndet från p till $(1,0)$, igen med hjälp av Pythagoras sats, till

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1+4}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

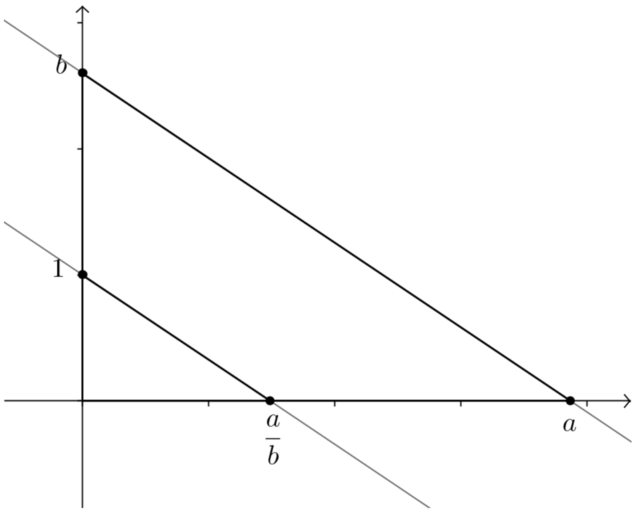
Det här talet känner vi igen som längden av pentagonens sida!

(iii) Rita en cirkel med centrum i $(1,0)$ och som går genom p. Denna skär vår ursprungliga cirkel i en punkt som vi kan kalla q. Avståndet mellan $(1,0)$ och q är då $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, eftersom det är samma som avståndet mellan $(1,0)$ och p. Om vi nu drar en linje mellan $(1,0)$ och q har vi därför konstruerat en sida hos den regelbundna pentagonen. Men hjälp av passaren kan vi rita en cirkel med centrum i q som går genom $(1,0)$. Skärningspunkten med vår ursprungliga cirkel är då pentagonens tredje hörn. På samma sätt fortsätter vi för att få det fjärde och femte hörnet.



Övning 3.1. I den här lösningen är det enklast att utföra konstruktionen då a och b är positiva tal. När vi bevisat påståendet för positiva a och b följer resultatet med ett liknande resonemang som för produkten. Om $a = 0$ behövs inget bevis, eftersom vi då redan vet att $a/b = 0$ är konstruerbart. Om a är negativ, och b positiv kan vi konstruera $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, och därefter $\frac{a}{b}$. Samma sak gäller om a är positiv och b negativ. Om de båda är negativa kan vi konstruera $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

Låt oss dra en linje mellan $(a, 0)$ och $(0, b)$. Därefter använder vi Sats 2.1.18 för att dra en parallell linje, som går genom $(0, 1)$. Denna linje skär x-axeln i någon punkt $(c, 0)$. De två linjerna bildar, tillsammans med koordinataxlarna, två trianglar. Enligt Sats 2.1.21 gäller att förhållandet mellan motsvarande sidor är detsamma för de tre sidorna. Vi får därför att $a/c = b/1$, det vill säga $c = a/b$. Vi har alltså konstruerat punkten $(a/b, 0)$, och det följer att ab är ett konstruerbart tal. Se även figuren nedan.



Övning 3.3. Vi måste visa att $\mathbb{Q}$ är en delmängd av K, det vill säga att varje rationellt tal är ett element i K. Eftersom K är en kropp innehåller den talet 1. Då K är sluten under addition innehåller den även varje heltal n, ty

$$n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ 1:or}}.$$

Slutenhet under division ger nu att alla kvoter av heltal (med nollskild nämnare) finns i K, vilket är detsamma som att varje rationellt tal är ett element i K.

Övning 3.5. Vi använder oss av ett motsägelsebevis. Antag att $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Då finns det rationella tal a och b sådana att

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}.$$

Kvadrerar vi likheten ovan får vi

$$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2.$$

Om $a = 0$ får vi då

$$3 = 2b^2,$$

vilket är en motsägelse, eftersom 3 är udda. Om $b = 0$ får vi istället

$$3 = a^2,$$

vilket också är en motsägelse, eftersom $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Kvarstår gör endast möjligheten att $a, b \neq 0$, vilket implicerar att $ab \neq 0$. Därmed kan vi sluta oss till att

$$\sqrt{2} = \frac{3 - a^2 - b^2}{2ab},$$

vilket är en motsägelse eftersom $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Övning 3.7. Tag $a, b, c, d \in K$ så att

$$\begin{aligned} k &= a + b\sqrt{\alpha} \\ l &= c + d\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Då får vi

$$\begin{aligned} \overline{(kl)} &= \overline{(a + b\sqrt{\alpha})(c + d\sqrt{\alpha})} \\ &= \overline{ac + ad\sqrt{\alpha} + b\sqrt{\alpha}c + b\sqrt{\alpha}d\sqrt{\alpha}} \\ &= \overline{(ac + bd\alpha) + (ad + bc)\sqrt{\alpha}} \\ &= (ac + bd\alpha) - (ad + bc)\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \overline{k} \cdot \bar{l} &= \overline{a + b\sqrt{\alpha}} \cdot \overline{c + d\sqrt{\alpha}} \\ &= (a - b\sqrt{\alpha})(c - d\sqrt{\alpha}) \\ &= ac - ad\sqrt{\alpha} - b\sqrt{\alpha}c + b\sqrt{\alpha}d\sqrt{\alpha} \\ &= ac + bd\alpha - (ad + bc)\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Så vi ser att $\overline{(kl)} = \overline{k}\overline{l}$. Om $k \in K$ är det klart från definitionen av konjugatet att $\overline{k} = k$. Antag att $\overline{k} = k$. Det ger att

$$a - b\sqrt{\alpha} = a + b\sqrt{\alpha},$$

vilket medför att

$$b = 0.$$

Således har vi $k = a \in K$.

Övning 3.9. Vi ska använda oss av ett motsägelsebevis för att visa A inte är en kropp. Antag att A är en kropp. Då är A sluten under subtraktion. Eftersom $1 + \sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ båda är element i A har vi därför att $1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1 \in A$, vilket ger att

$$1 = a + \sqrt{2},$$

för något rationellt tal a. Detta medför att

$$1 - a = \sqrt{2},$$

vilket är en motsägelse eftersom $1 - a$ är ett rationellt tal och $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Övning 3.11. (i) Antag att $0 = a + b\sqrt{\alpha}$, där $a, b \in K$. Om $b = 0$ följer det direkt att $a = 0$, så vi antar att $b \neq 0$. Då följer det att $\sqrt{\alpha} = -\frac{a}{b} \in K$, en motsägelse! Därför måste det gälla att $a = b = 0$.

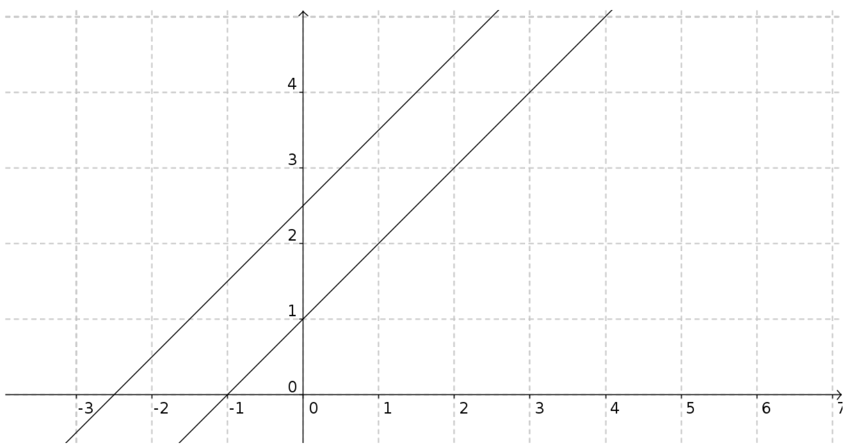
(ii) Antag att $a + b\sqrt{\alpha} = c + d\sqrt{\alpha}$, där $a, b, c, d \in K$. Då gäller det att $0 = a - c + (b - d)\sqrt{\alpha}$. Enligt den första delen av den här Övningen medför detta att $a - c = b - d = 0$, vilket innebär att $a = c$ och $b = d$.

Övning 4.1. Cirkelns ekvation är $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$. Linjens ekvation är $2y = 7x - 46$. Båda ekvationerna tas fram med hjälp av de två punkter som finns angivna för cirkeln, respektive linjen.

Övning 4.3. Eftersom arean är 4π måste radien vara 2. Observera också att diametern är 4, och att punkterna $(-1, 0)$ och $(3, 0)$ ligger på avstånd 4 från varandra. Det betyder att om vi drar en linje mellan $(-1, 0)$ och $(3, 0)$ får vi en diameter. Det vill säga, linjen går genom cirkelns centrum. Cirkelns centrum är alltså mittpunkten mellan $(-1, 0)$ och $(3, 0)$, vilken är $(1, 0)$. Nu när vi vet cirkelns centrum och radie kan vi också sätta upp ekvationen som är

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

Övning 4.5. Ekvationssystemet saknar lösning. Man kan inse att linjerna är parallella genom att t. ex. beräkna bådas riktningskoefficient. Båda linjerna har riktningskoefficient 1.



Övning 4.7. För att lösa ekvationssystemet börjar vi med att utveckla parenteserna, vilket ger

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 2y &= 11, \\ x^2 - 4x + y^2 + 6y &= -9. \end{cases}$$

Därefter subtraherar vi den andra ekvationen från den första, och får

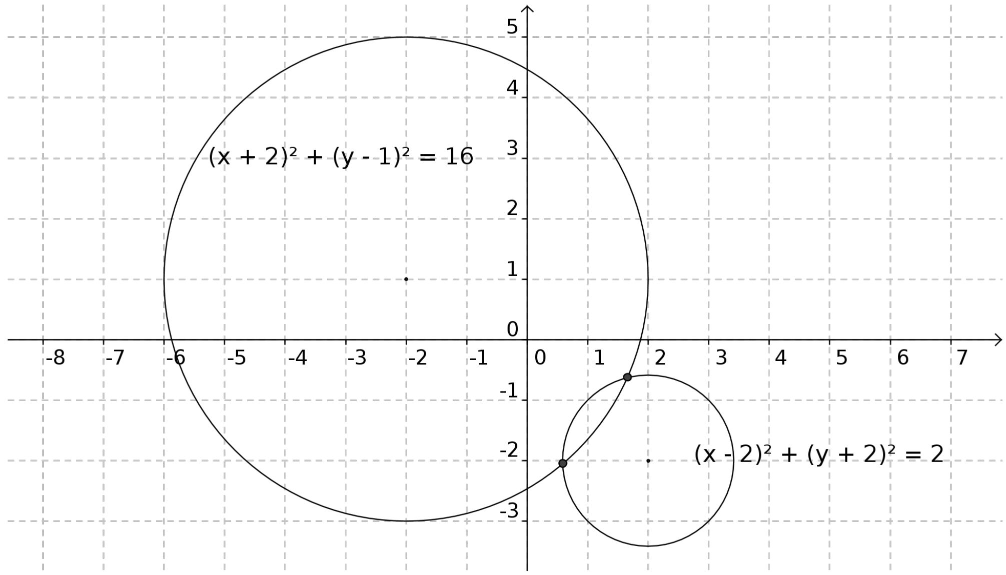
$$\begin{cases} 8x - 8y &= 20, \\ x^2 - 4x + y^2 + 6y &= -9. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger $y = x - 5/2$, vilket vi sätter in i den andra. Detta ger en andragradsekvation i x, som efter förenkling blir

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{8} = 0.$$

Denna ekvation har lösningarna $x = (3 \pm \sqrt{7})/4$. Vi sätter in dessa värden i $y = x - 5/2$, för att få motsvarande värden för y. Detta ger oss de två lösningarna

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{7}}{4}, y_1 = \frac{-7-\sqrt{7}}{4}, \text{ och } x_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{4}, y_2 = \frac{-7+\sqrt{7}}{4}.$$



Övning 4.9. Kom ihåg att lösningarna till ett ekvationssystem är de gemensamma lösningarna till alla ekvationer i systemet. I det här fallet kan det tolkas geometriskt som skärningspunkterna mellan två cirklar och en linje. Skärningspunkterna mellan de två cirklarna kan beräknas till $(1, 6)$ och $(4, 3)$. För att ekvationssystemet ska ha en lösning krävs att även linjen passerar genom någon av dessa punkter.

(i) För att ekvationssystemet ska ha exakt en lösning ska linjen passera genom exakt en av punkterna $(1, 6)$ och $(4, 3)$ (ej båda). Till exempel kan vi välja $k = 1$ och $m = 5$.

(ii) För att ekvationssystemet ska ha två lösningar krävs att linjen passerar genom båda punkterna $(1, 6)$ och $(4, 3)$. För att få detta måste vi välja $k = -1$ och $m = 7$.

(iii) Eftersom cirklarna har två skärningspunkten kan ekvationssystemet ha maximalt två lösningar. Här existerar alltså inget exempel.

(iv) Inget exempel finns, se föregående punkt.

(v) För att ekvationssystemet ska sakna lösningar ska vi välja en linje som inte passerar genom någon av punkterna $(1, 6)$ och $(4, 3)$. Till exempel kan vi välja $k = 1$ och $m = 0$.

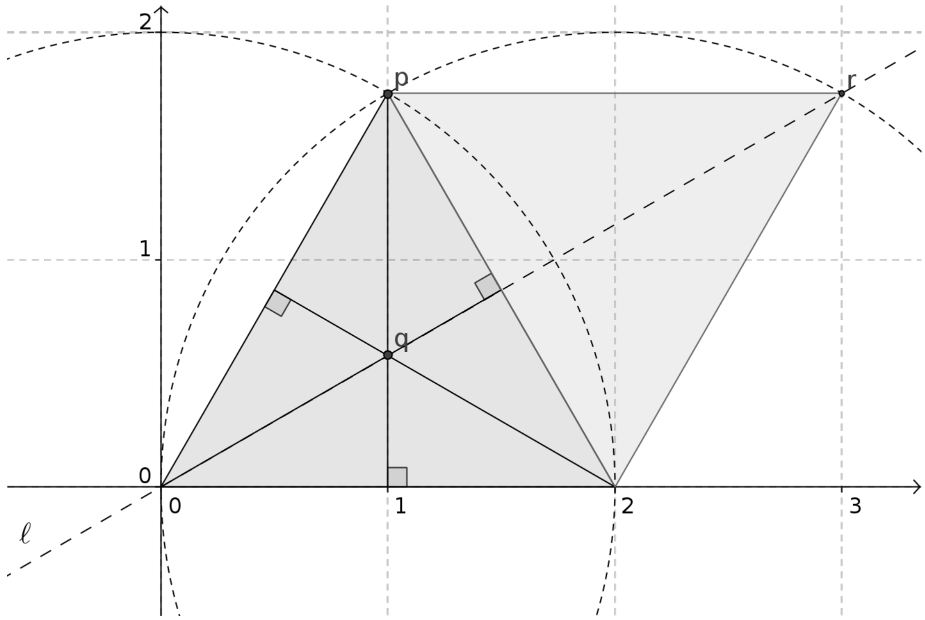
Övning 4.11. Observera att p är en av skärningspunkterna mellan cirklarna som beskrivs av de två ekvationerna

$$x^2 + y^2 = 4, \text{ och } (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

Ett sätt att beräkna koordinaterna för p är alltså att lösa ekvationssystemet som består av dessa två ekvationer. Alternativt kan vi lätt se att x-koordinaten måste vara 1, och därefter substituera $x = 1$ i ekvationen $x^2 + y^2 = 4$ för att få y-koordinaten. Vi får att y-koordinaten för punkten p är $\sqrt{3}$. Från Övning

1.9 vet vi att $\sqrt{3}$ inte tillhör $\mathbb{Q}$. Ett exempel på en kropp som innehåller koordinaterna för p är alltså $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Ett sätt att beräkna koordinaterna för q är följande. Vi ritar ut en till liksidig triangel med hörn i $(2, 0)$ och p, så att de två trianglarna tillsammans bildar en romb. Vi kallar det nya hörnet för r.



Eftersom triangelns sida har längd 2 måste x-koordinaten för r vara 3. Vet vet också att r har samma y-koordinat som p, alltså $\sqrt{3}$. Låt oss kalla linjen som går genom r och origo för ℓ. Eftersom vi vet två punkter som denna linje passerar genom kan vi också ta fram dess ekvation. Denna blir $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Linjen ℓ går också genom q, och vi vet att q har x-koordinaten 1. Vi sätter alltså in $x = 1$ i ekvationen för ℓ, och får att y-koordinaten för q är $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Observera att $\frac{1}{\sqrt{3}}$ också ligger i kroppen $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Sammanfattningsvis har vi alltså

$$p = (1, \sqrt{3}), \; q = (1, \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

och koordinaterna ligger i kroppen $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Övning 5.1.

(i) $\pm1, \pm2, \pm4$

(ii) $\pm1, \pm5$

(iii) $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$.

Av de tre talen ovan är 2 ett primtal, medan de två övriga inte är det.

Övning 5.3. Vi ska använda oss av ett motsägelsebevis för att bevisa att n och m måste vara relativt prima. Antag därför att n och m inte är relativt prima. Då finns det ett heltal $d \neq \pm1$ sådant att d delar både n och m. Att d delar m innebär att det finns ett heltal s sådant att $m = sd$, vilket ger att $mk = skd$. Det visar att d delar mk, men detta det är en motsägelse eftersom d delar n och $d \neq \pm1$. Således måste n och m vara relativt prima.

Övning 5.5. För varje heltal n gäller det att $n = 1 \cdot n$ och $n = (-1)(-n)$, vilket bevisar båda påståendena.

Övning 5.7. Detta följer direkt från definitionerna av primtal och relativt prima tal, ty p har inga delare förutom ± 1 och $\pm p$. Då p inte delar n följer det att ± 1 är de enda gemensamma delarna till p och n, varför p och n är relativt prima.

Övning 6.1. Om

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) q_n(x),$$

för något polynom q_n av grad $d - n$ är det klart att $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ är rötter till $p(x)$. Antag istället att $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ är rötter till $p(x)$. Eftersom α_1 är en rot till $p(x)$ så ger Sats 6.2.1 att det finns ett polynom $q_1(x)$ av grad $d - 1$ sådant att

$$p(x) = (x - \alpha_1) q_1(x).$$

Eftersom α_2 också är en rot till $p(x)$ gäller det således att

$$(\alpha_2 - \alpha_1) q_1(\alpha_2) = 0.$$

Enligt antagande är α_2 inte lika med α_1, varför det måste gälla att $q_1(\alpha_2) = 0$. Detta betyder per definition att α_2 är en rot till $q_1(x)$, så Sats 6.2.1 ger att

$$q_1(x) = (x - \alpha_2) q_2(x),$$

för något polynom q_2 av grad $d - 2$. Således har vi att

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) q_2(x),$$

och genom fortsatt användning av Sats 6.2.1 får vi att

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) q_n(x),$$

för något polynom q_n av grad $d - n$.

Övning 6.3. Som i beviset av Sats 6.2.4 har vi

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0,$$

vilket är ekvivalent med

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n.$$

Således är q en delare till $a_n p^n$. Följdsats 5.2.9 och Sats 5.2.7 ger därför tillsammans att q delar a_n.

Övning 6.5. Minns att $\beta = a + b\sqrt{\alpha_{n-1}}$, där $a, b \in K_{n-1}$. Det följer att

$$\begin{aligned} -\beta + -\overline{\beta} + a_n &= -a - b\sqrt{\alpha_{n-1}} - a + b\sqrt{\alpha_{n-1}} + a_2 \\ &= -2a + a_n. \end{aligned}$$

Eftersom K_{n-1} är en kropp följer det att $\beta - \overline{\beta} + a_2 \in K_{n-1}$.

Övning 6.7. (i) Låt $p(x), q(x) \in A$. Det betyder att $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$ och således har vi

$$(p+q)(\alpha) = p(\alpha) + q(\alpha) = 0 + 0 = 0,$$

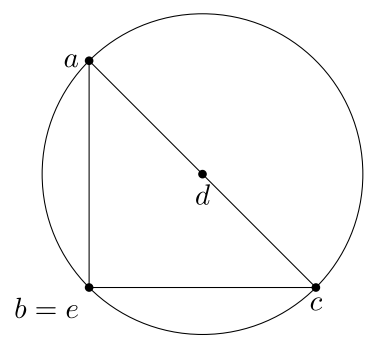
vilket medför att $p(x) + q(x) \in A$.

(ii) Låt $p(x) \in A$ och låt $r(x)$ vara ett godtyckligt polynom med koefficienter i K. Då har vi

$$rp(\alpha) = r(\alpha)p(\alpha) = r(\alpha) \cdot 0 = 0,$$

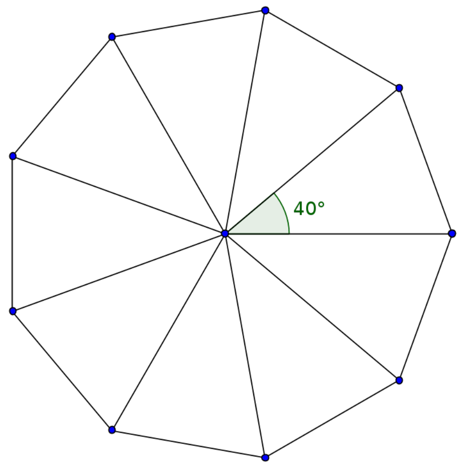
vilket medför att $r(x)p(x) \in A$.

Övning 7.1. Låt d var mittpunkten av cirkeln med diameter ac. Låt e vara skärningspunkten mellan cirkeln och linjen genom b och d, som ligger på samma sida om ac som d. Enligt Övning 2.7 är vinkeln cea rät. Vi påstår nu att $e = b$, ty annars hade vinkeln vid b inte varit rätvinklig.



Övning 7.3. Vi börjar med att studera fallet med passare och (ograderad) linjal. Beviset är ett motsägelsebevis. Antag att vi kan konstruera en regelbunden niohörning. Låt oss dra linjer från niohörningens mittpunkt till två närliggande hörn. Då bildas en vinkel på $(360/9)^\circ = 40^\circ$. Som vi vet sedan tidigare kan vi dela vinklar i två med passare och linjal. Det skulle då betyda att vi kan konstruera vinkeln 20°. Men vi såg i beviset av Sats 7.2.1 att just denna vinkel inte är möjlig att konstruera. Vi har alltså fått en motsägelse till antagandet att niohörningen är konstruerbar, och kan dra slutsatsen att den inte är konstruerbar.

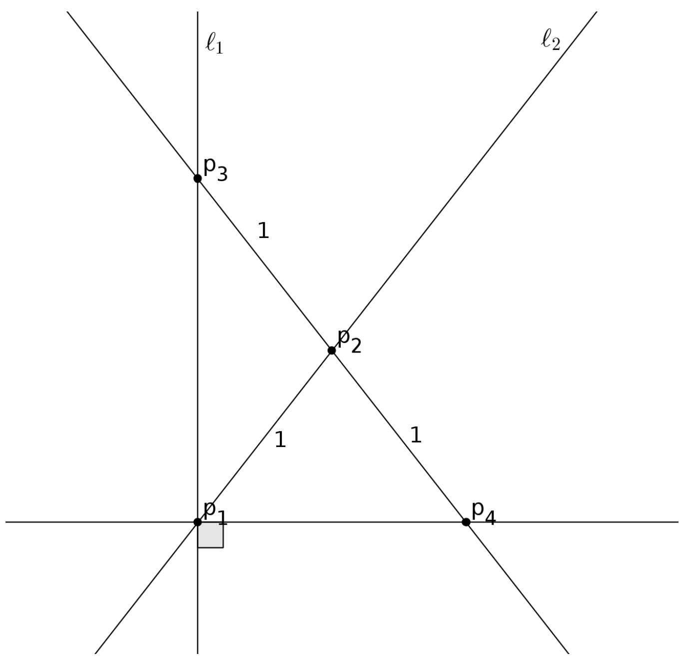
Med en graderad linjal har vi sett att vi kan tredela vinklar. Detta gör det möjligt att konstruera av en regelbunden niohörning på följande vis. Vinkeln 120° är konstruerbar, och därmed är även $v = \frac{120}{3} = 40^\circ$ konstruerbar med den graderade linjalen. Sats 2.1.15 medför att vi kan använda vinkeln v för att "lägga 9 vinklar av storlek v intill varandra" och därmed konstruera en 9-hörning. Se Figuren nedan.



Övning 7.5. Eftersom ℓ_1 och ℓ_2 inte är parallella har de en skärningspunkt, som vi kan kalla p_1. Markera en punkt p_2 på ℓ_2 på avstånd 1 från p_1. Förutom p_1 finns en annan punkt p_3 på ℓ_1 som är på avstånd 1 från p_2. Men den graderade linjalen kan vi få punkten p_3. Därefter kan vi dra en linje mellan p_3 och p_2, och markera en punkt p_4 på denna linje som ligger på avstånd 1 från p_2. Dra nu en linje genom p_1 och p_4. Vi ska nu visa att denna linje är vinkelrät mot ℓ_1. Sats 2.1.5 ger att $p_4p_1p_2 = p_2p_4p_1$ och att $p_2p_1p_3 = p_1p_3p_2$. Låt oss kalla dessa vinklar för v respektive w. Satserna 2.1.17, 2.1.19 och 2.1.13 ger tillsammans att

$$(180^\circ - 2v) + (180^\circ - 2w) = 180^\circ,$$

vilket medför att $v + w = 90^\circ$.



A Trigonometri

I denna appendix går vi igenom några grundläggande begrepp inom trigonometri. Vårt huvudsakliga syfte är att bevisa Sats A.0.8, vilken används i beviset av omöjligheten i vinkelns tredelning.

Vi ska börja med att definiera de trigonometriska funktionerna *sinus* och *cosinus*. I definitionen använder vi oss av *enhetscirkeln*, vilket är cirkeln med radie 1 och centrum i origo.

Definition A.0.1. Dra en linje från origo till en punkt på enhetscirkeln, så att en vinkel v bildas mellan linjen och x-axeln. Vi definierar *sinus* vinkeln v som y-koordinaten för punkten på enhetscirkeln. Detta värde betecknas med $\sin(v)$. Vi definierar även *cosinus* av en vinkeln v som x-koordinaten för punkten på enhetscirkeln, och betecknar detta $\cos(v)$. Se Figur A.1.

Observera att vinkeln v mäts moturs, från x-axeln. Om vi i stället mäter medurs får vi motsvarande negativa vinkel. Detta illustreras till vänster i Figur A.2. I figuren kan vi också avläsa sambanden

$$\begin{aligned}\sin(-v) &= -\sin(v),\\ \cos(-v) &= \cos(v).\end{aligned}$$

Till höger i Figur A.2 kan vi även avläsa sambanden

$$\begin{aligned}\sin(v) &= \cos(90^\circ - v),\\ \cos(v) &= \sin(90^\circ - v).\end{aligned}$$

Exempel A.0.2. Vi ska nu beräkna $\cos(60^\circ)$. Kom ihåg att vinklarna i en liksidig triangel är 60°. Vi ritar därför in en liksidig triangel med sida 1 i enhetscirkeln, enligt Figur A.3. Vi delar också in den liksidiga triangeln i två rätvinkliga trianglar genom att dra en linje från det övre hörnet rakt ner till x-axeln. Denna linje träffar x-axeln precis mitt emellan 0 och 1, d.v.s. i $1/2$. Detta är alltså x-koordinaten för punkten som är det övre hörnet i triangeln. Men vi vet också att denna punkt har x-koordinaten $\cos(60^\circ)$, enligt definitionen av cosinus. Vi kan dra slutsatsen att $\cos(60^\circ) = 1/2$. ▲

Exempel A.0.3. Med hjälp av de olika sambanden vi sett, och Exempel A.0.2 kan vi även beräkna $\cos(-60^\circ)$, $\sin(30^\circ)$ och $\sin(-30^\circ)$. Vi har

$$\cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

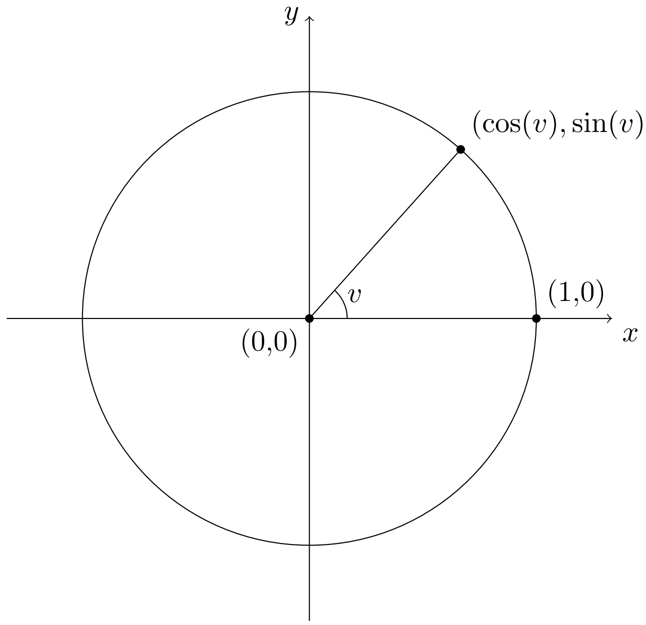
enligt A. Enligt A har vi

$$\sin(30^\circ) = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}.$$

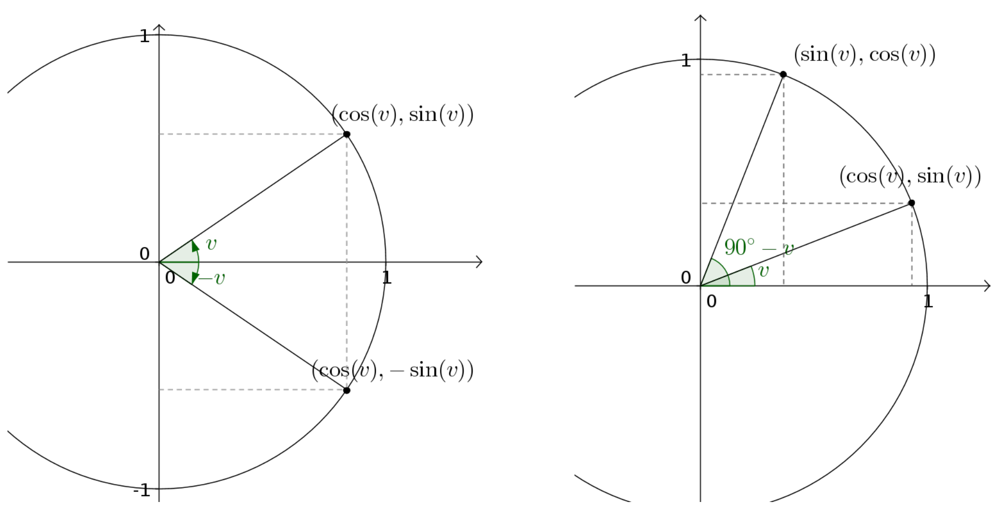
Sist har vi

$$\sin(-30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

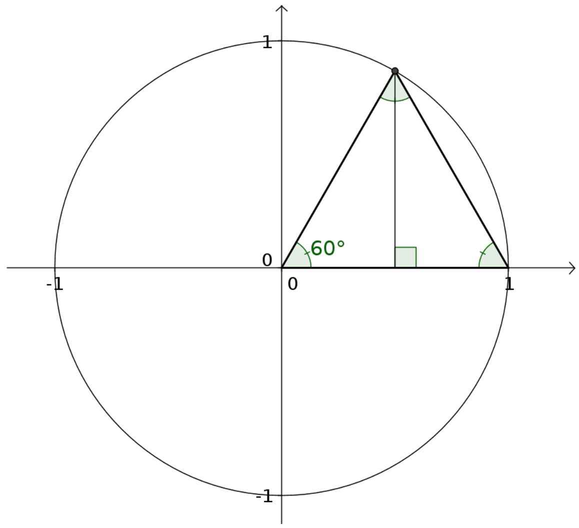
enligt A. ▲



Figur A.1: Definition av sinus och cosinus



Figur A.2: Till vänster: Vinklar v och $-v$, och motsvarande värden för sinus och cosinus
Till höger: Vinklar v och $90° - v$, och motsvarande värden för sinus och cosinus



Figur A.3: Beräkning av $\cos(60°)$.

Innan vi beskriver nästa samband mellan sinus och cosinus behöver vi göra följande definition.

Definition A.0.4. Låt x vara ett reellt tal. Vi definierar *absolutbeloppet* av x som

$$|x| = \begin{cases} x \text{ om } x \geq 0 \\ -x \text{ om } x < 0. \end{cases}$$

Absolutbeloppet av ett positivt tal är alltså talet självt. Om vi har ett negativt tal däremot, får vi absolutbeloppet genom att sätta ett minustecken framför, vilket gör att vi får den positiva motsvarigheten av talet. Absolutbeloppet av ett tal är alltså alltid större än eller lika med 0. Till exempel är $|3| = 3$ och $|-3| = 3$.

Låt oss nu återvända till trigonometrin. Vi tänker oss att vi har en vinkel v utritad i enhetscirkeln. Sedan drar vi en lodrät linje mellan punkten på enhetscirkeln och x-axeln, som i Figur A.4. Detta ger en rätvinklig triangel med hypotenusa av längd 1. Triangelns kateter har längd $|\cos(v)|$ och $|\sin(v)|$. Observera att absolutbeloppet är nödvändigt här, eftersom längden av en sträcka ju inte kan vara negativ.

Sats A.0.5. *För alla vinklar v gäller*

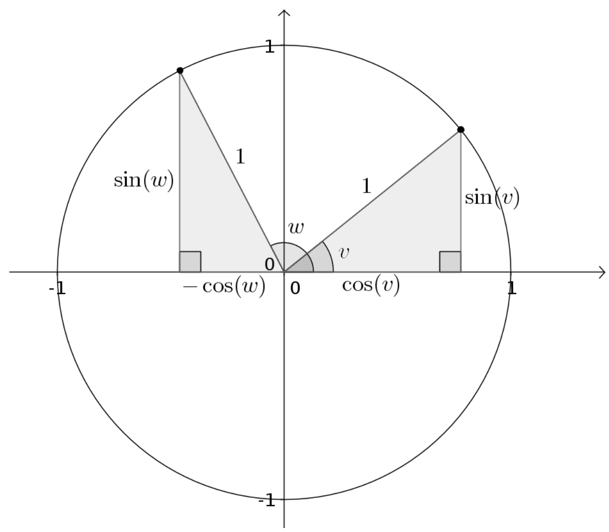
$$(\sin(v))^2 + (\cos(v))^2 = 1.$$

Bevis. För varje vinkel v finns en rätvinklig triangel med hypotenusa av längd 1 och kateter av längd $|\sin(v)|$ och $|\cos(v)|$, se Figur A.4. Det följer av Pythagoras sats att

$$(|\sin(v)|)^2 + (|\cos(v)|)^2 = 1.$$

I det här uttrycket är absolutbeloppstecknen onödiga, eftersom $x^2 = (-x)^2$ för alla reella tal x. Vi har alltså

$$(\sin(v))^2 + (\cos(v))^2 = 1.$$



Figur A.4: Två rätvinkliga trianglar och deras sidlängder

□

Ett användbart verktyg inom trigonometrin är additionsformeln för cosinus.

Sats A.0.6 (Additionsformeln för cosinus)**.** *För alla vinklar v och w gäller*

$$\cos(v+w) = \cos(v)\cos(w) - \sin(v)\sin(w).$$

Bevis. Kom ihåg att avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) ges av formeln

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

vilken kan härledas med hjälp av Pythagoras sats. Betrakta nu Figur A.5. Notera att det finns två likadana trianglar i figuren; en med hörn i punkterna $(0,0), (\cos(v+w), \sin(v+w))$ och $(1,0)$, och en med hörn i punkterna $(0,0), (\cos(v), \sin(v))$ och $(\cos(w), -(sin(w))$. Det innebär att avståndet från $(\cos(v{+}w), \sin(v{+}w)$ till $(1,0)$ är detsamma som avståndet från $(\cos(v), \sin(v))$ till $(\cos(w), -(\sin(w))$. Vi beräknar de båda avstånden och likställer uttrycken. Det ger

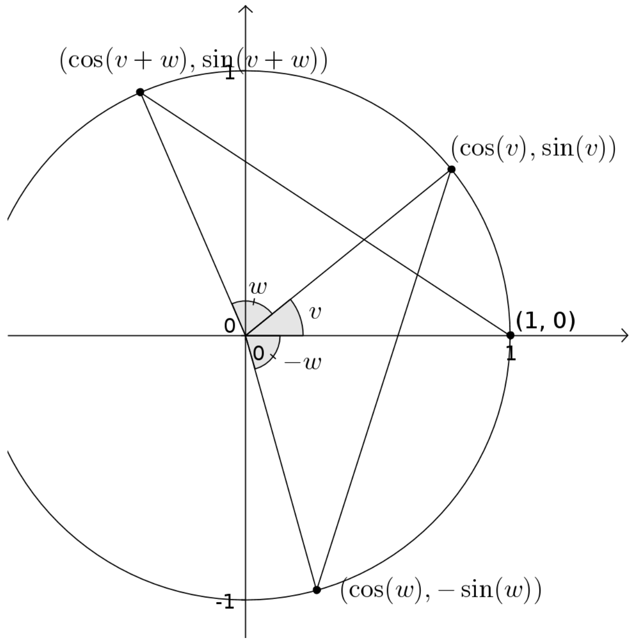
$$\sqrt{(\cos(v+w) - 1)^2 + (\sin(v+w) - 0)^2} = \\ \sqrt{(\cos(v) - \cos(w))^2 + (\sin(v) - (-\sin(w)))^2}.$$

För att dessa två uttryck ska vara lika krävs att uttrycken under rottecknen är lika. Vi har därför

$$(\cos(v+w) - 1)^2 + (\sin(v+w))^2 = (\cos(v) - \cos(w))^2 + (\sin(v) + \sin(w))^2.$$

Vi utvecklar kvadraterna och får

$$(\cos(v+w))^2 - 2\cos(v+w) + 1 + (\sin(v+w))^2 = \\ (\cos(v))^2 - 2\cos(v)\cos(w) + (\cos(w))^2 + \\ + (\sin(v))^2 + 2\sin(v)\sin(w) + (\sin(w))^2.$$



Figur A.5: Denna figur används i beviset av additionsformeln för cosinus.

Enligt Sats A.0.5 är

$$
\begin{aligned}
(\cos(v+w))^2 + (\sin(v+w))^2 &= 1, \\
(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 &= 1 \text{ och} \\
(\cos(w))^2 + (\sin(w))^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Det gör att (A) förenklas till

$$2 - 2\cos(v+w) = 2 - \cos(v)\cos(w) + 2\sin(v)\sin(w).$$

Detta kan i sin tur förenklas till

$$\cos(v+w) = \cos(v)\cos(w) - \sin(v)\sin(w),$$

vilket vi skulle bevisa. □

Från Sats A.0.6 kan vi härleda följande, också väldigt användbara, formler.

Följdsats A.0.7. *För alla vinklar v och w gäller*

$$
\begin{aligned}
\cos(v-w) &= \cos(v)\cos(w) + \sin(v)\sin(w), \\
\sin(2v) &= 2\cos(v)\sin(v) \ \textit{och} \\
\cos(2v) &= 2(\cos(v))^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Bevis. Vi börjar med att bevisa (A.0.7). Enligt Sats A.0.6 är

$$\cos(v-w) = \cos(v+(-w)) = \cos(v)\cos(-w) - \sin(v)\sin(-w).$$

Därefter använder vi (A) och (A), och får då

$$\cos(v-w) = \cos(v)\cos(w) + \sin(v)\sin(w).$$

Låt oss gå vidare till (A.0.7). Enligt Sats A.0.6 har vi

$$\cos(2v) = \cos(v+v) = (\cos(v))^2 - (\sin(v))^2.$$

Det följer av Sats A.0.5 att $(\sin(v))^2 = 1 - (\cos(v))^2$. Vi sätter in detta i uttrycket ovan, och får

$$\cos(2v) = 2(\cos(v))^2 - 1.$$

Sista ska vi också bevisa (A.0.7). Vi börjar med att använda (A) för att göra omskrivningen

$$\sin(2v) = \cos(90^\circ - 2v) = \cos((90^\circ - v) - v).$$

Därefter använder vi (A.0.7), och får

$$\cos((90^\circ - v) - v) = \cos(90^\circ - v)\cos(v) + \sin(90^\circ - v)\sin(v).$$

Sist använder vi (A) och (A), och får

$$\begin{aligned}&\cos(90^\circ - v)\cos(v) + \sin(90^\circ - v)\sin(v) = \\ &\quad \sin(v)\cos(v) + \cos(v)\sin(v) = 2\sin(v)\cos(v).\end{aligned}$$

Vi kan nu dra slutsatsen att

$$\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v).$$

□

Det finns även liknande formler för $\sin(v+w)$ och $\sin(v-w)$, men vi utelämnar dessa här eftersom vi inte behöver dem för vårt ändamål. Vi har nu kommit fram till vår sista sats, vilken är formeln för $\cos(2v)$ som används i beviset Sats 7.2.1.

Sats A.0.8. *För alla vinklar v gäller*

$$\cos(3v) = 4(\cos(v))^3 - 3\cos(v).$$

Bevis. Det följer av Sats A.0.6, Följdsats A.0.7, och sist Sats A.0.5 att

$$\begin{aligned}\cos(3v) &= \cos(2v+v) = \cos(2v)\cos(v) - \sin(2v)\sin(v) = \\ &= (2(\cos(v))^2 - 1)\cos(v) - 2\cos(v)(\sin(v))^2 = \\ &= (2(\cos(v))^2 - 1)\cos(v) - 2\cos(v)(1 - (\cos(v))^2) = \\ &= 2(\cos(v))^3 - \cos(v) + 2(\cos(v))^3 - 2\cos(v) = 4(\cos(v))^3 - 3\cos(v).\end{aligned}$$

□

B Förslag till vidare läsning

Euklides *Elementa* online (engelska)
`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements`

George E Martin, *Geometric Constructions*
Springer, 2012

Anders Tengstrand, *Åtta kapitel om geometri*
Studentlitteratur, 2004

Sakregister