Stockholms Matematiska Cirkel
Grafteori med inriktning på färgläggning

www.math-stockholm.se/cirkel

17.20-18.20: Föreläsning kapitel 2
18.30-19.00: Gästföreläsning

STOCKHOLMS MATEMATIKCENTRUM

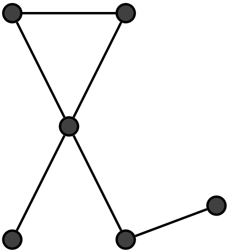
Förra föreläsningen – Frl 1 (13 sep)

- Kapitel 1
  - Mängder
  - Matematisk bevisföring
  - Induktionsbevis
- Tjuvtitt på Kapitel 2
  - Grafer, färgläggning

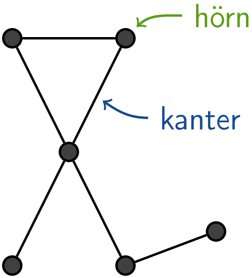
Kapitel 2

Kapitel 2.1 – Grundläggande definitioner och egenskaper

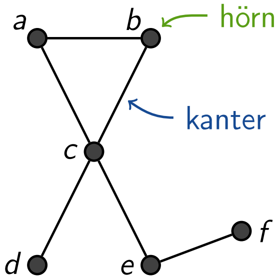
Definition 2.1.1 – graf



Definition 2.1.1 – graf



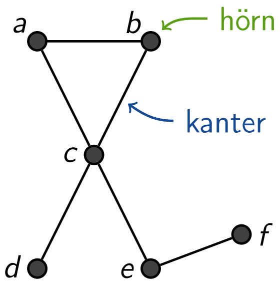
Definition 2.1.1 – graf



Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Definition 2.1.1 – graf



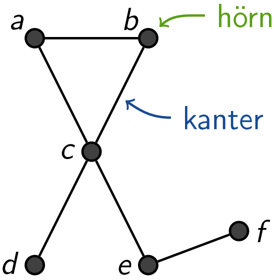
Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{ \qquad \}$$

Definition 2.1.1 – graf



Hörnmängd:

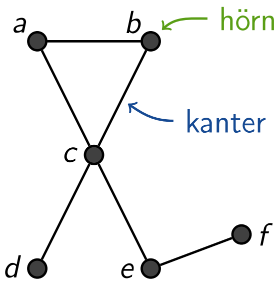
$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}$$

$$\}$$

Definition 2.1.1 – graf



Hörnmängd:

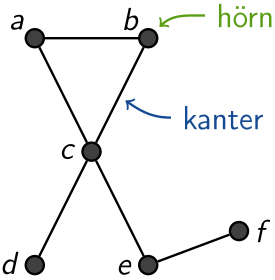
$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}$$

$$\}$$

Definition 2.1.1 – graf



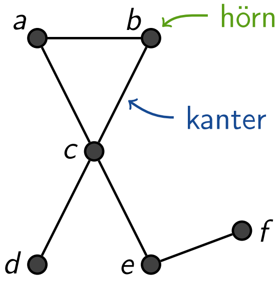
Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$$
$$\}$$

Definition 2.1.1 – graf



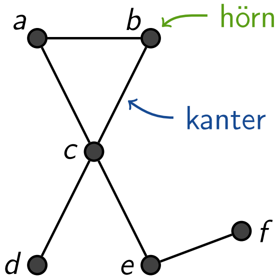
Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\} \}$$

Definition 2.1.1 – graf



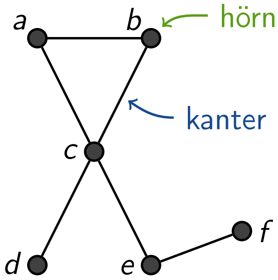
Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$$
$$\{c, d\}, \{c, e\} \qquad \}$$

Definition 2.1.1 – graf



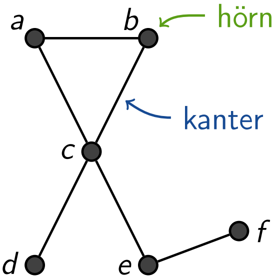
Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},\\ \{c, d\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$$

Definition 2.1.1 – graf



Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$$

Vi skriver: grafen $G = (V, E)$

Definition 2.1.1 – graf

- V och E är ändliga mängder

Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$$

Vi skriver: grafen $G = (V, E)$

Definition 2.1.1 – graf

- V och E är ändliga mängder
- $V \neq \emptyset$

Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$$

Vi skriver: grafen $G = (V, E)$

Definition 2.1.1 – graf

- V och E är ändliga mängder
- $V \neq \emptyset$
- Varje kant måste gå mellan två hörn

Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Kantmängd

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$$

Vi skriver: grafen $G = (V, E)$

Definition 2.1.1 – graf

- V och E är ändliga mängder
- $V \neq \emptyset$
- Varje kant måste gå mellan två hörn
- Elementen i E är par av hörn, dvs mängder av två element från V

Hörnmängd:

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

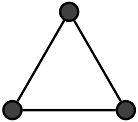
Kantmängd

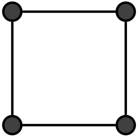
$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{e, f\}\}$$

Vi skriver: grafen $G = (V, E)$

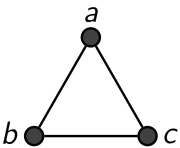
Varför heter det hörn och kanter?

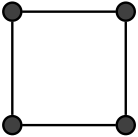
Varför heter det hörn och kanter?





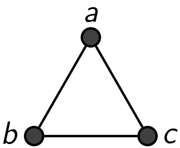
Varför heter det hörn och kanter?

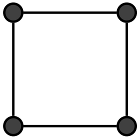




$$V = \{a, b, c\}$$

Varför heter det hörn och kanter?

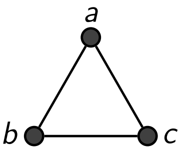


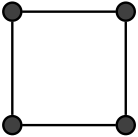


$$V = \{a, b, c\}$$

$$E = \{ \qquad \qquad \qquad \}$$

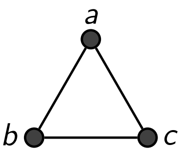
Varför heter det hörn och kanter?

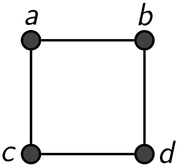




$$V = \{a, b, c\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$$

Varför heter det hörn och kanter?

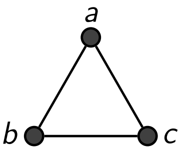


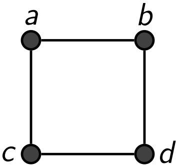


$$V = \{a, b, c\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$$

$$V = \{a, b, c, d\}$$

Varför heter det hörn och kanter?

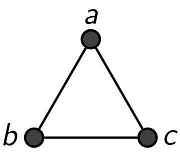


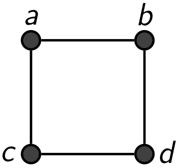


$$V = \{a, b, c\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$$

$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{ \qquad \}$$

Varför heter det hörn och kanter?

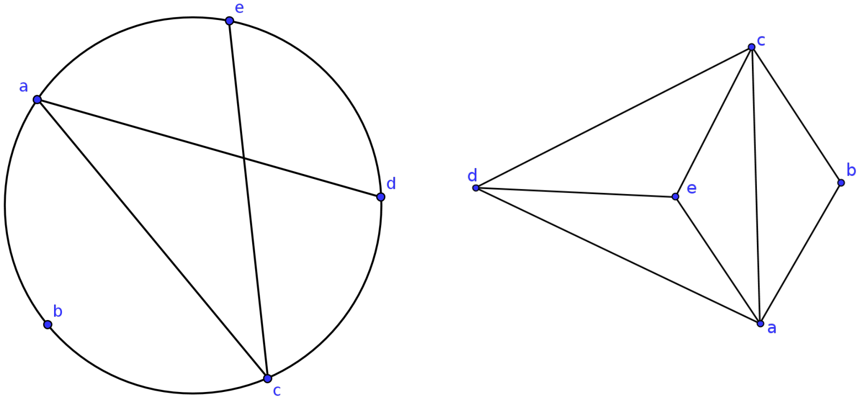




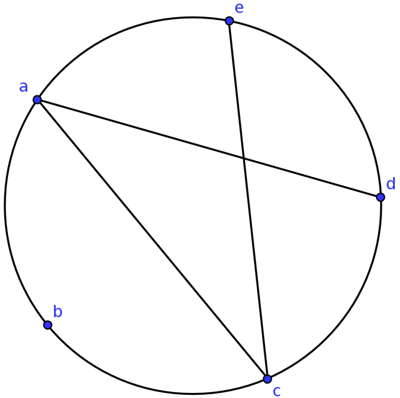
$$V = \{a, b, c\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}\}$$

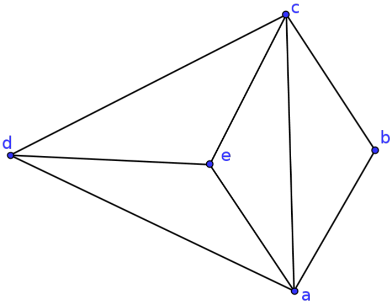
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{d, c\}, \{c, a\}\}$$

Grafer kan ritas upp på olika sätt



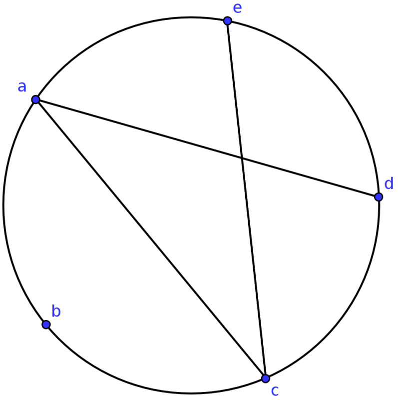
Grafer kan ritas upp på olika sätt





Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

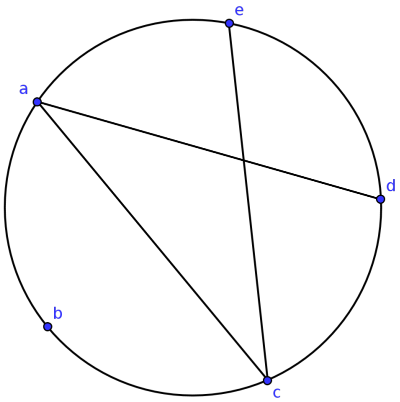
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

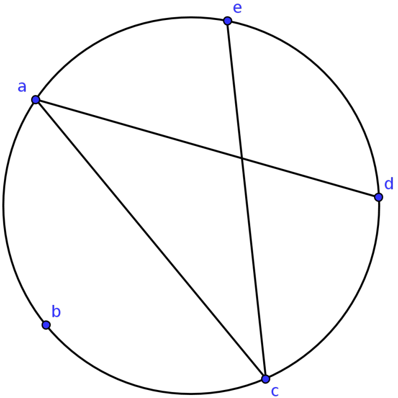
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×			
b					
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

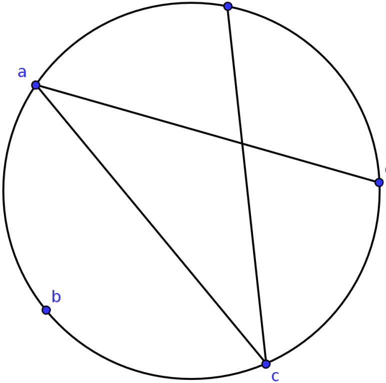
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×		
b					
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

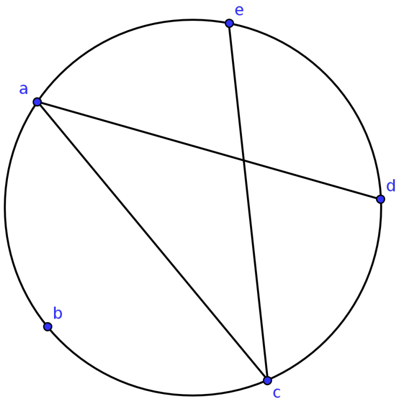
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	
b					
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

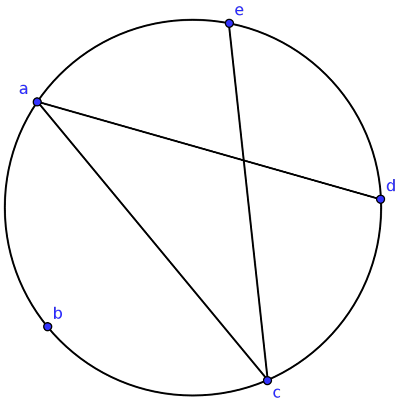
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b					
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

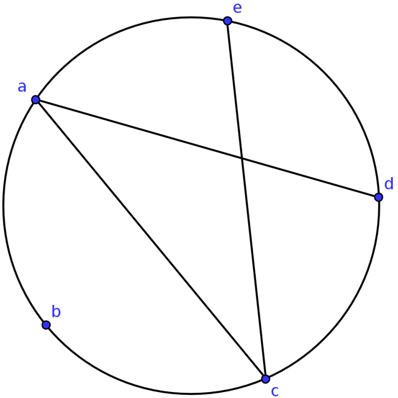
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×				
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

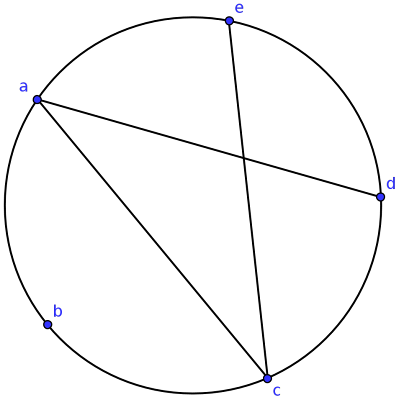
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c					
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

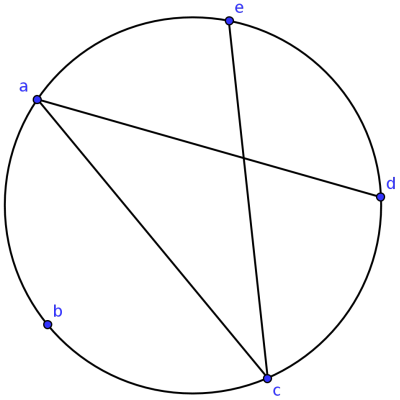
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×				
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

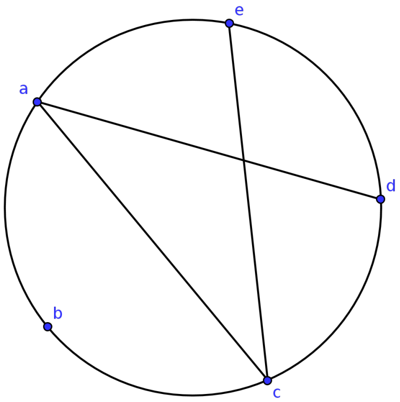
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×			
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

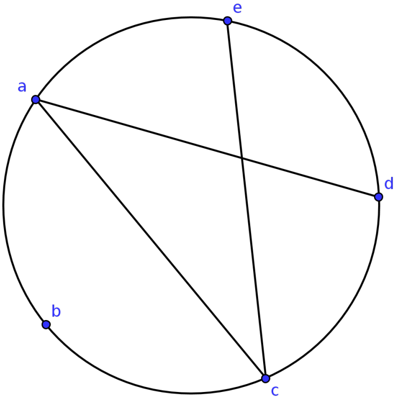
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

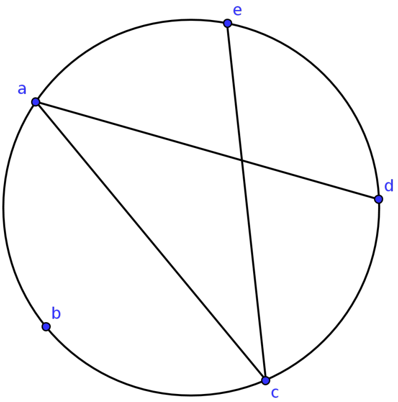
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d					
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

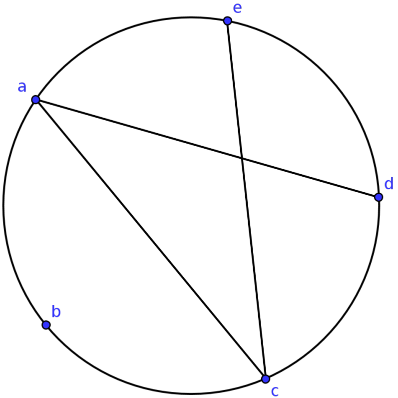
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d	×				
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

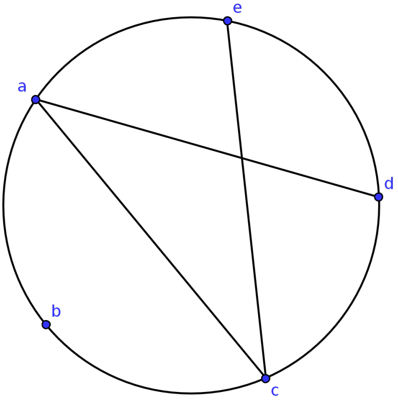
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d	×		×		
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

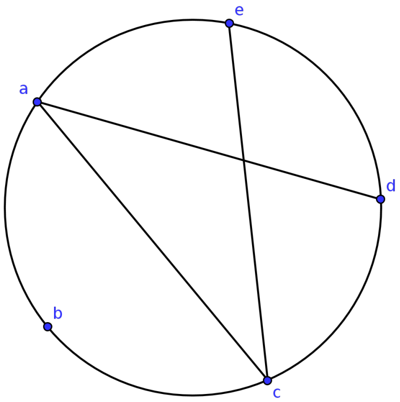
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d	×		×		×
e					

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

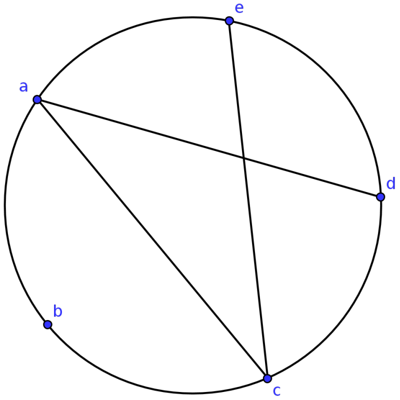
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d	×		×		×
e	×				

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

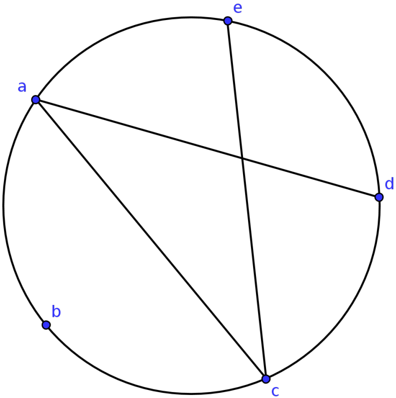
Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d	×		×		×
e	×		×		

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

Grafer kan ritas upp på olika sätt



	a	b	c	d	e
a		×	×	×	×
b	×		×		
c	×	×		×	×
d	×		×		×
e	×		×	×	

Figurerna visar samma graf – det är samma V och E

Varför grafer?

Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 1

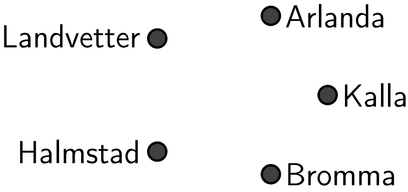
- $V = \{\text{Arlanda}, \text{Landvetter}, \text{Kallax}, \text{Bromma}, \text{Halmstad}\}$

Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 1

- $V = \{\text{Arlanda}, \text{Landvetter}, \text{Kallax}, \text{Bromma}, \text{Halmstad}\}$

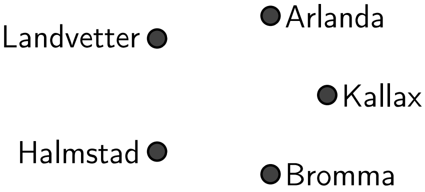


Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 1

- $V = \{\text{Arlanda}, \text{Landvetter}, \text{Kallax}, \text{Bromma}, \text{Halmstad}\}$
- $E =$ de par av flygplatser som har direktflyg mellan sig

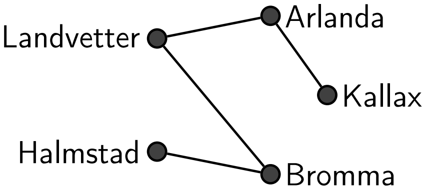


Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 1

- $V = \{\text{Arlanda, Landvetter, Kallax, Bromma, Halmstad}\}$
- $E =$ de par av flygplatser som har direktflyg mellan sig



Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 2

- $V =$ alla elever på en skola

Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 2

- $V =$ alla elever på en skola
- $E =$ par av elever som har minst en gemensam kurs

Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 3

- $V =$ alla gator i Stockholm

Varför grafer?

- Grafer används för att beskriva relationer mellan objekt

Exempel 3

- $V =$ alla gator i Stockholm
- $E =$ par av gator som korsar varandra

Definition 2.1.2 – grannar

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar*
om de sammanbinds av en kant

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant,
dvs om $\{a, b\} \in E$.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.

Definition 2.1.3 – grad

Definition 2.1.2 – grannar

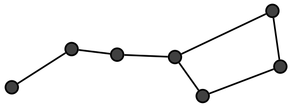
Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.

Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.

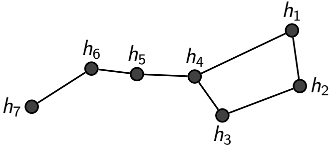


Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.

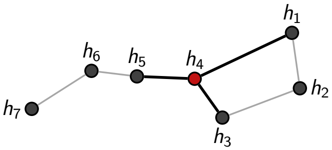


Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



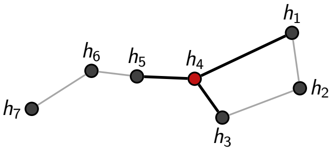
$$d(h_4) =$$

Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



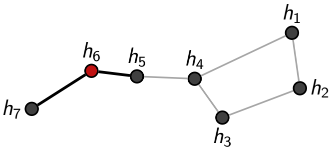
$$d(h_4) = 3$$

Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



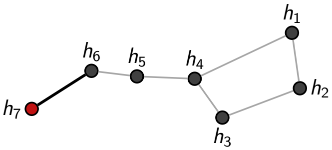
Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



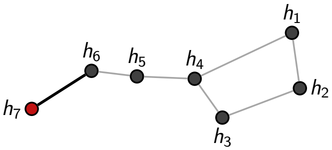
Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



Definition 2.1.3 – grad

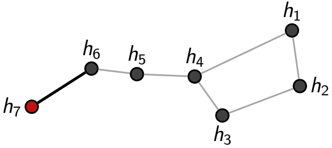
Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Maximala graden $\Delta(G)$ är den högsta graden av något hörn i G

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

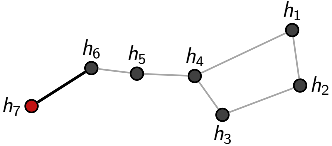
Maximala graden $\Delta(G)$ är den högsta graden av något hörn i G

Minimala graden $\delta(G)$ är den lägsta graden av något hörn i G

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Maximala graden $\Delta(G)$ är den högsta graden av något hörn i G

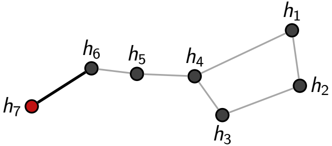
Minimala graden $\delta(G)$ är den lägsta graden av något hörn i G

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

$$\Delta(G) =$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Maximala graden $\Delta(G)$ är den högsta graden av något hörn i G

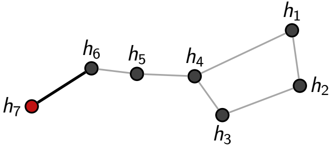
Minimala graden $\delta(G)$ är den lägsta graden av något hörn i G

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

$$\Delta(G) = 3$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

Maximala graden $\Delta(G)$ är den högsta graden av något hörn i G

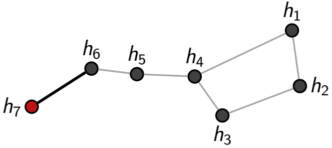
Minimala graden $\delta(G)$ är den lägsta graden av något hörn i G

$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

$$\Delta(G) = 3$$
$$\delta(G) =$$

Definition 2.1.2 – grannar

Låt $G = (V, E)$ vara en graf.
Två hörn $a, b \in V$ sägs vara *grannar* om de sammanbinds av en kant, dvs om $\{a, b\} \in E$.



Definition 2.1.3 – grad

Antalet grannar till ett hörn $a \in V$ kallas *graden* av a och skrivs $d(a)$.

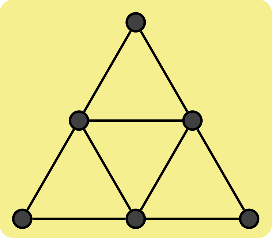
Maximala graden $\Delta(G)$ är den högsta graden av något hörn i G

Minimala graden $\delta(G)$ är den lägsta graden av något hörn i G

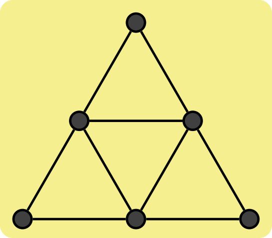
$$d(h_4) = 3$$
$$d(h_6) = 2$$
$$d(h_7) = 1$$

$$\Delta(G) = 3$$
$$\delta(G) = 1$$

Exempel

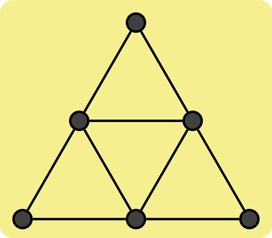
$G =$ 

Exempel

$G =$ 

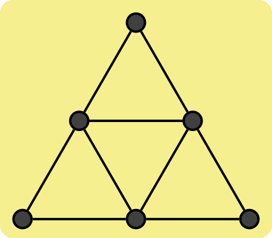
$\Delta(G) =$
$\delta(G) =$

Exempel

$G =$ 

$$\Delta(G) = 4$$
$$\delta(G) =$$

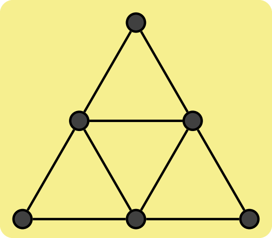
Exempel

$G =$ 

$$\Delta(G) = 4$$
$$\delta(G) = 2$$

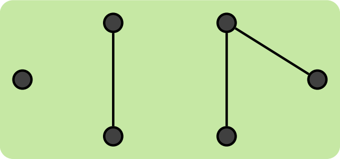
Exempel

$G =$

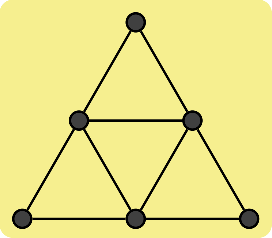


$\Delta(G) = 4$
$\delta(G) = 2$

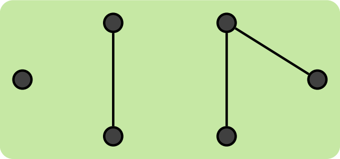
$H =$



Exempel

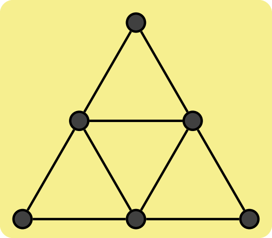
$G =$ 

$$\Delta(G) = 4$$
$$\delta(G) = 2$$

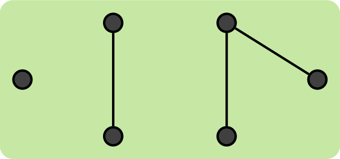
$H =$ 

$$\Delta(H) =$$
$$\delta(H) =$$

Exempel

$G =$ 

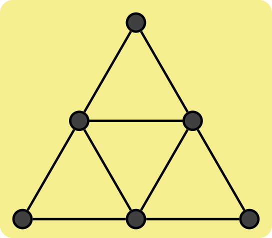
$$\Delta(G) = 4$$
$$\delta(G) = 2$$

$H =$ 

$$\Delta(H) = 2$$
$$\delta(H) =$$

Exempel

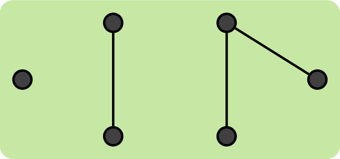
$G =$



$\Delta(G) = 4$

$\delta(G) = 2$

$H =$



$\Delta(H) = 2$

$\delta(H) = 0$

Sats 2.1.5 – Handskakningslemmat

Låt $G = (V, E)$
och $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

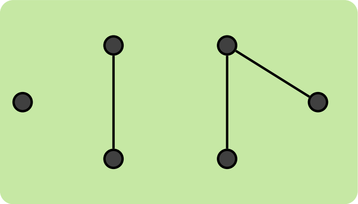
Då är

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Summan av graderna av alla hörn
är dubbelt så stor som antalet kanter

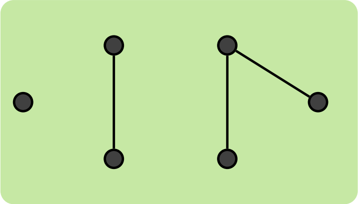
$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Exempel



$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

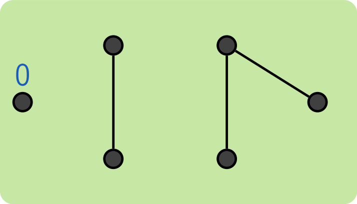
Exempel



VL $=$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

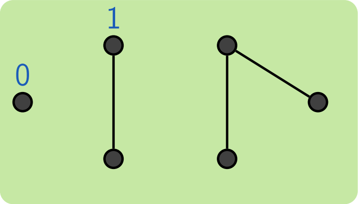
Exempel



$\mathrm{VL} = 0$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

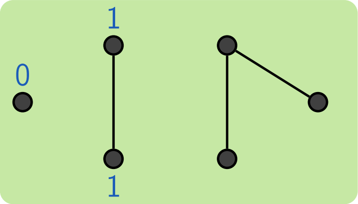
Exempel



$\mathrm{VL} = 0 + 1$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

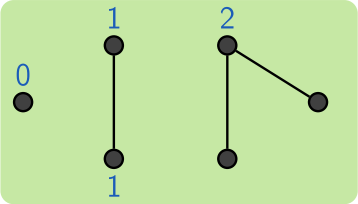
Exempel



$$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

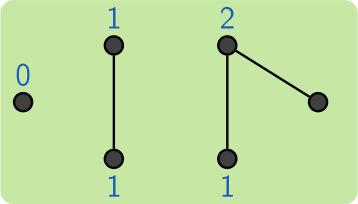
Exempel



$$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1 + 2$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

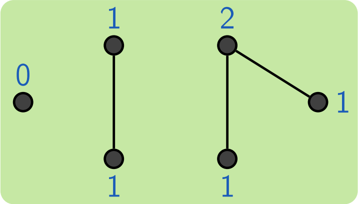
Exempel



$$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1 + 2 + 1$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

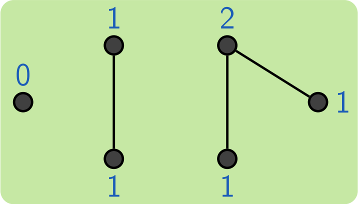
Exempel



$$\text{VL} = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

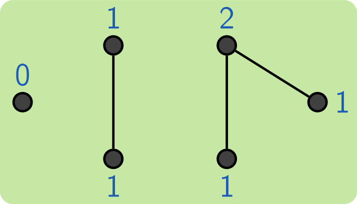
Exempel



$$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Exempel

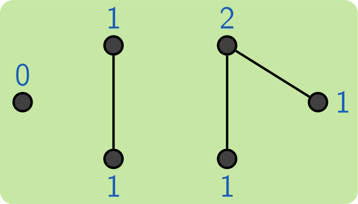


$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$

$\mathrm{HL} =$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

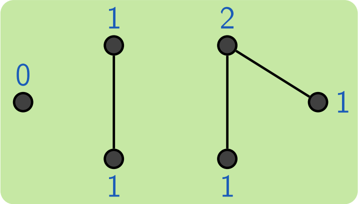
Exempel



$$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$$
$$\mathrm{HL} = 2 \cdot 3$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Exempel



$$\mathrm{VL} = 0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6$$
$$\mathrm{HL} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.
Vänsterledet: vi går igenom alla hörn i grafen,

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.
Vänsterledet: vi går igenom alla hörn i grafen,
och summerar antalet kanter vid varje hörn.

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.
Vänsterledet: vi går igenom alla hörn i grafen,
och summerar antalet kanter vid varje hörn.
Varje kant kommer då räknas två gånger,

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.
Vänsterledet: vi går igenom alla hörn i grafen,
och summerar antalet kanter vid varje hörn.
Varje kant kommer då räknas två gånger,
eftersom varje kant går mellan två hörn.

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.
Vänsterledet: vi går igenom alla hörn i grafen,
och summerar antalet kanter vid varje hörn.
Varje kant kommer då räknas två gånger,
eftersom varje kant går mellan två hörn.
Alltså blir summan dubbelt så stor som antalet kanter.

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|.$$

Bevis av Sats 2.1.5

Graden av ett hörn är antalet kanter vid det hörnet.
Vänsterledet: vi går igenom alla hörn i grafen,
och summerar antalet kanter vid varje hörn.
Varje kant kommer då räknas två gånger,
eftersom varje kant går mellan två hörn.
Alltså blir summan dubbelt så stor som antalet kanter. $\square$

Handskakningar?

Handskakningar?

- Varje hörn är en person på en fest

Handskakningar?

- Varje hörn är en person på en fest
- En kant mellan två hörn om personerna har skakat hand

Handskakningar?

- Varje hörn är en person på en fest
- En kant mellan två hörn om personerna har skakat hand

$$d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_n) = 2|E|$$

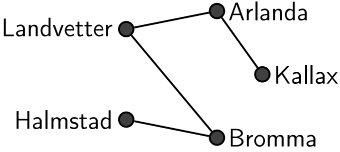
Exempel på grafer som har fått egna namn

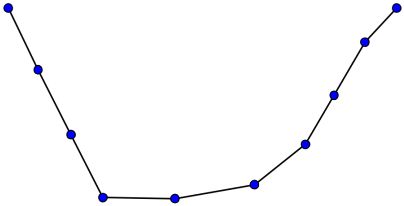
Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.7 – stig

Exempel på grafer som har fått egna namn

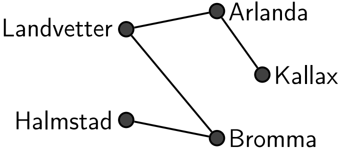
Definition 2.1.7 – stig

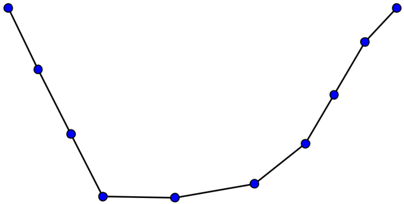




Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.7 – stig

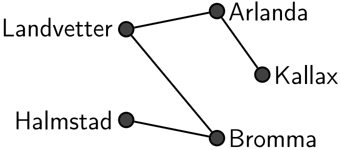


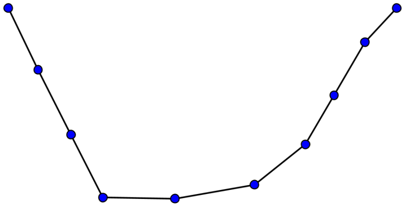


Hörnen kan numreras så att $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\}$

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.7 – stig



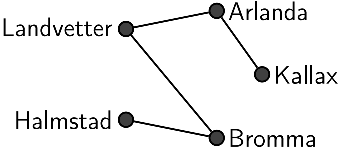


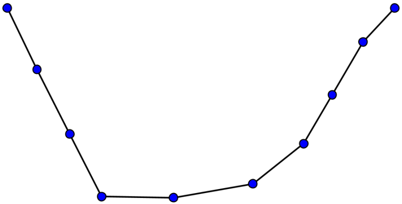
Hörnen kan numreras så att $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\}$

Antalet kanter är stigens *längd*

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.7 – stig





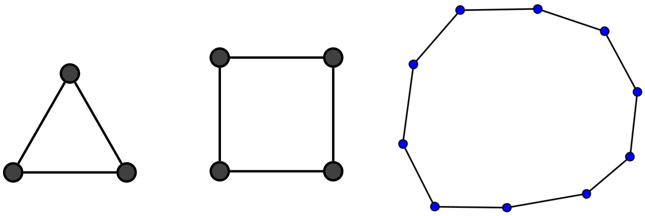
Hörnen kan numreras så att $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\}$

Antalet kanter är stigens *längd*

Obs: Grafen $G = \{\{a\}, \emptyset\}$ är en stig av längd noll

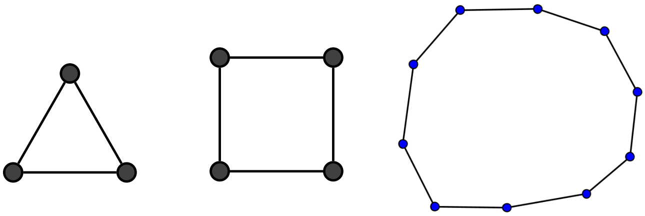
Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.8 – cykel



Exempel på grafer som har fått egna namn

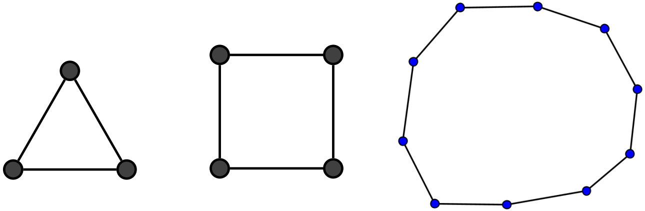
Definition 2.1.8 – cykel



Hörnen kan numreras så att
$E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}$

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.8 – cykel

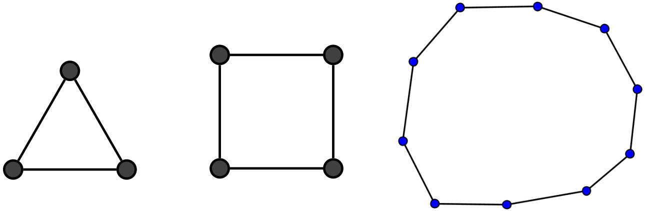


Hörnen kan numreras så att
$E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}$

Antalet kanter är cykelns *längd*

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.8 – cykel

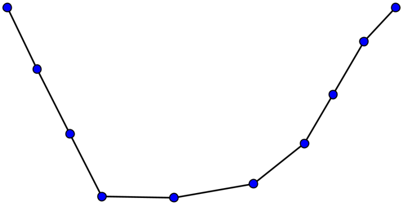


Hörnen kan numreras så att
$E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \,|\, 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}$

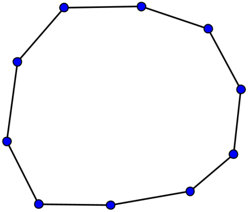
Antalet kanter är cykelns *längd*

Obs: En cykel måste ha minst tre hörn

Fråga: Vad är $\Delta(G)$ och $\delta(G)$ för en stig och en cykel?

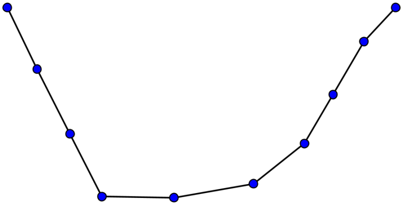


$\Delta(G) =$
$\delta(G) =$

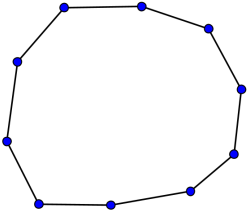


$\Delta(G) =$
$\delta(G) =$

Fråga: Vad är $\Delta(G)$ och $\delta(G)$ för en stig och en cykel?

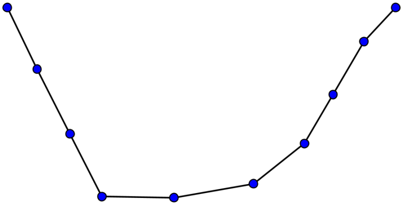


$$\Delta(G) = 2$$
$$\delta(G) = 1$$

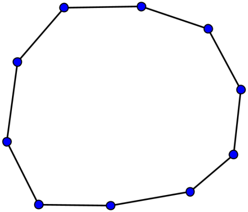


$$\Delta(G) = 2$$
$$\delta(G) = 2$$

Fråga: Vad är $\Delta(G)$ och $\delta(G)$ för en stig och en cykel?



$\Delta(G) = 2$
$\delta(G) = 1$



$\Delta(G) = 2$
$\delta(G) = 2$

Men för en stig av längd noll:

$\Delta(G) = 0$
$\delta(G) = 0$

Exempel på grafer som har fått egna namn

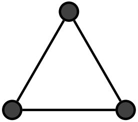
Definition 2.1.9 – komplett graf K^n

En komplett graf K^n är en graf med n hörn
där alla hörn är grannar med varandra.

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.9 – komplett graf K^n

En komplett graf K^n är en graf med n hörn
där alla hörn är grannar med varandra.

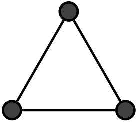


K^3

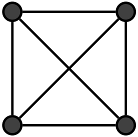
Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.9 – komplett graf K^n

En komplett graf K^n är en graf med n hörn där alla hörn är grannar med varandra.



K^3

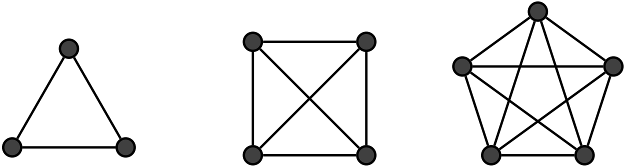


K^4

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.9 – komplett graf K^n

En komplett graf K^n är en graf med n hörn där alla hörn är grannar med varandra.

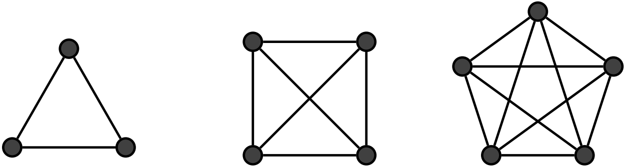


K^3 K^4 K^5

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.9 – komplett graf K^n

En komplett graf K^n är en graf med n hörn
där alla hörn är grannar med varandra.



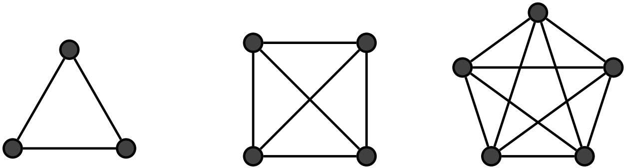
K^3 K^4 K^5

$$\Delta(K^n) =$$
$$\delta(K^n) =$$

Exempel på grafer som har fått egna namn

Definition 2.1.9 – komplett graf K^n

En komplett graf K^n är en graf med n hörn där alla hörn är grannar med varandra.



K^3 K^4 K^5

$$\Delta(K^n) = n - 1$$
$$\delta(K^n) = n - 1$$

Definition 2.1.10 – delgraf

Definition 2.1.10 – delgraf

Repetition: delmängd

$A = \{a, b, c, d, e\}$

Definition 2.1.10 – delgraf

Repetition: delmängd

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{a, b, e\}$ är en delmängd till A: $B \subseteq A$

Definition 2.1.10 – delgraf

Repetition: delmängd

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{a, b, e\}$ är en delmängd till A: $B \subseteq A$

$C = \{a, f\}$ är inte en delmängd till A

Definition 2.1.10 – delgraf

Repetition: delmängd

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{a, b, e\}$ är en delmängd till A: $\quad B \subseteq A$

$C = \{a, f\}$ är inte en delmängd till A

Grafen $G_2 = (V_2, E_2)$ är en *delgraf* till grafen $G_1 = (V_1, E_1)$ om $V_2 \subseteq V_1$ och $E_2 \subseteq E_1$.

Definition 2.1.10 – delgraf

Repetition: delmängd

$A = \{a, b, c, d, e\}$
$B = \{a, b, e\}$ är en delmängd till A: $B \subseteq A$
$C = \{a, f\}$ är inte en delmängd till A

Grafen $G_2 = (V_2, E_2)$ är en *delgraf* till grafen $G_1 = (V_1, E_1)$ om $V_2 \subseteq V_1$ och $E_2 \subseteq E_1$.

Obs: E_2 kan förstås bara innehålla kanter mellan hörnen i V_2

Definition 2.1.10 – delgraf

Repetition: delmängd

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{a, b, e\}$ är en delmängd till A: $B \subseteq A$

$C = \{a, f\}$ är inte en delmängd till A

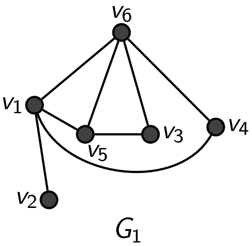
Grafen $G_2 = (V_2, E_2)$ är en *delgraf* till grafen $G_1 = (V_1, E_1)$ om $V_2 \subseteq V_1$ och $E_2 \subseteq E_1$.

Obs: E_2 kan förstås bara innehålla kanter mellan hörnen i V_2

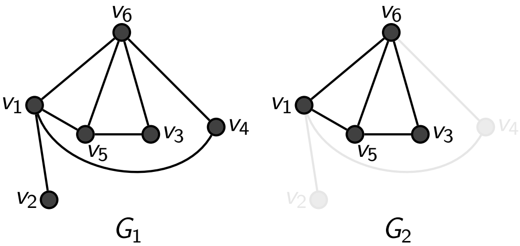
Vi kan också säga G_1 *innehåller* G_2

Exempel på delgrafer

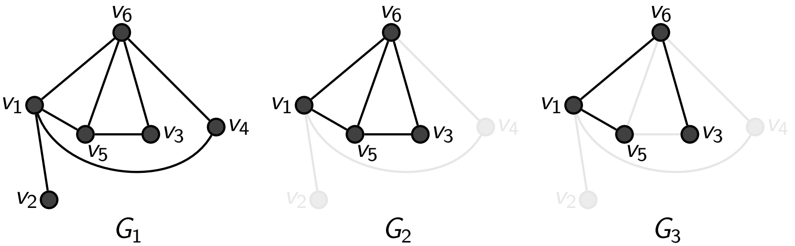
Exempel på delgrafer



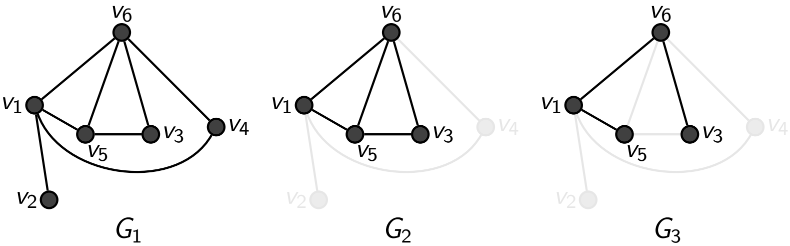
Exempel på delgrafer



Exempel på delgrafer

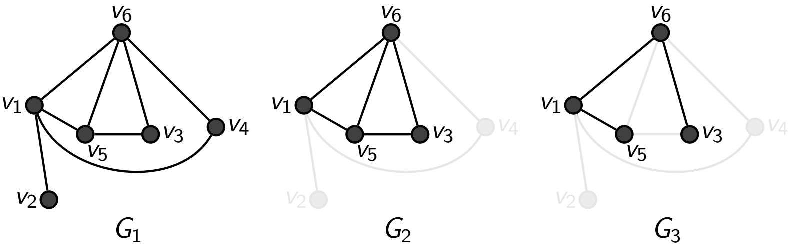


Exempel på delgrafer



G_2 och G_3 är delgrafer till G_1

Exempel på delgrafer



G_2 och G_3 är delgrafer till G_1

Dessutom är G_3 en delgraf till G_2

Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

$G_1 = (V_1, E_1)$

Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

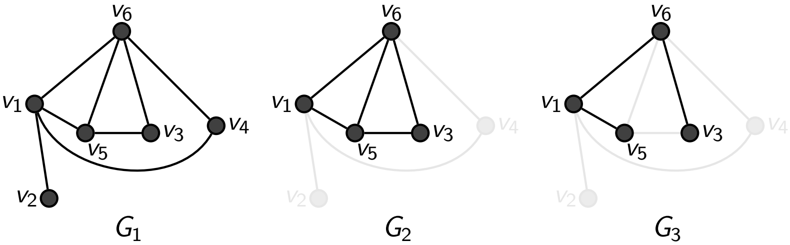
$G_1 = (V_1, E_1)$
Välj en hörnmängd $V_2 \subseteq V_1$

Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

$G_1 = (V_1, E_1)$
Välj en hörnmängd $V_2 \subseteq V_1$
Ta med så många kanter som möjligt i $E_2 \subseteq E_1$
så att $G_2 = (V_2, E_2)$ blir en graf

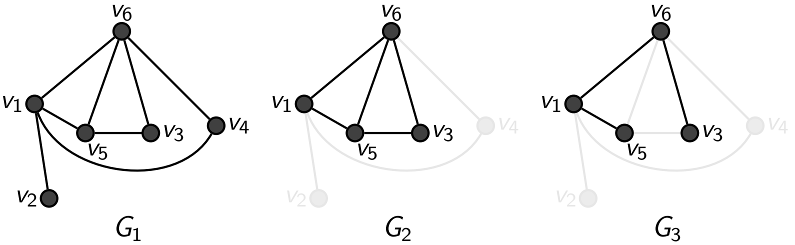
Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

$G_1 = (V_1, E_1)$
Välj en hörnmängd $V_2 \subseteq V_1$
Ta med så många kanter som möjligt i $E_2 \subseteq E_1$
så att $G_2 = (V_2, E_2)$ blir en graf



Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

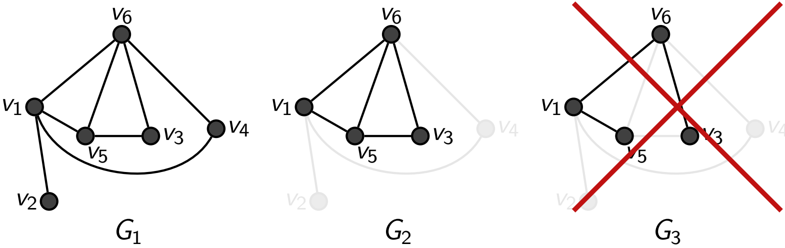
$G_1 = (V_1, E_1)$
Välj en hörnmängd $V_2 \subseteq V_1$
Ta med så många kanter som möjligt i $E_2 \subseteq E_1$
så att $G_2 = (V_2, E_2)$ blir en graf



G_2 är delgrafen inducerad av $V_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$

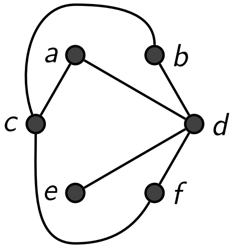
Definition 2.1.11 – inducerad delgraf

$G_1 = (V_1, E_1)$
Välj en hörnmängd $V_2 \subseteq V_1$
Ta med så många kanter som möjligt i $E_2 \subseteq E_1$
så att $G_2 = (V_2, E_2)$ blir en graf



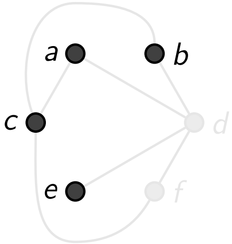
G_2 är delgrafen inducerad av $V_2 = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$

Ett till exempel



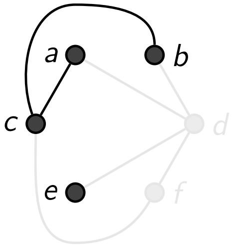
Rita delgrafen som induceras av $V_2 = \{a, b, c, e\}$

Ett till exempel



Rita delgrafen som induceras av $V_2 = \{a, b, c, e\}$

Ett till exempel



Rita delgrafen som induceras av $V_2 = \{a, b, c, e\}$

Definition 2.1.13 – sammanhängande graf

Definition 2.1.13 – sammanhängande graf

En graf är *sammanhängande* om det för varje par av hörn $u, v \in V$ finns en delgraf som är en stig mellan u och v

Definition 2.1.13 – sammanhängande graf

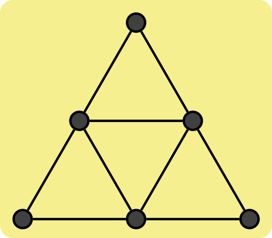
En graf är *sammanhängande* om det för varje par av hörn $u, v \in V$ finns en delgraf som är en stig mellan u och v

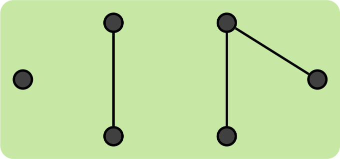
"Man kan gå längs kanterna mellan alla hörn i grafen"

Definition 2.1.13 – sammanhängande graf

En graf är *sammanhängande* om det för varje par av hörn $u, v \in V$ finns en delgraf som är en stig mellan u och v

"Man kan gå längs kanterna mellan alla hörn i grafen"

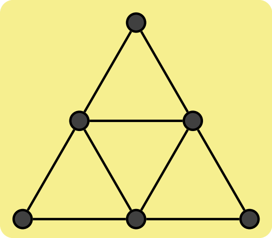




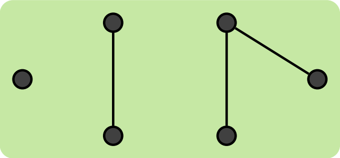
Definition 2.1.13 – sammanhängande graf

En graf är *sammanhängande* om det för varje par av hörn $u, v \in V$ finns en delgraf som är en stig mellan u och v

"Man kan gå längs kanterna mellan alla hörn i grafen"



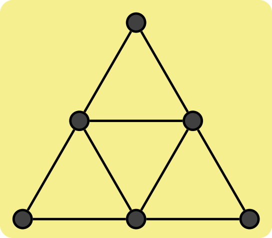
Sammanhängande



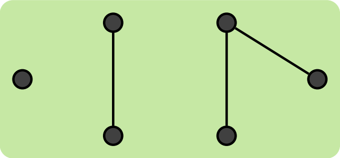
Definition 2.1.13 – sammanhängande graf

En graf är *sammanhängande* om det för varje par av hörn $u, v \in V$ finns en delgraf som är en stig mellan u och v

"Man kan gå längs kanterna mellan alla hörn i grafen"

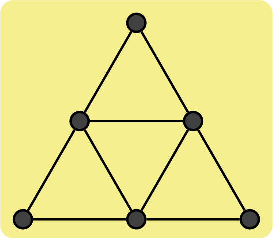


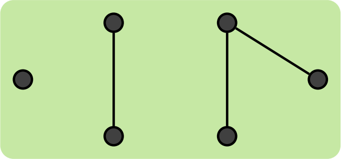
Sammanhängande



Ej sammanhängande

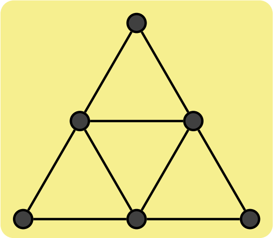
Sammanhängande komponenter

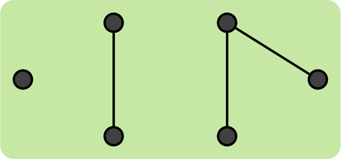




Sammanhängande komponenter

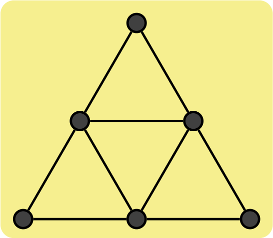
Alla grafer kan delas upp i *sammanhängande komponenter*.

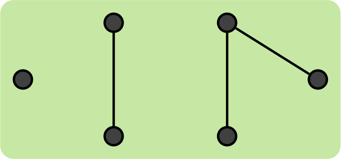




Sammanhängande komponenter

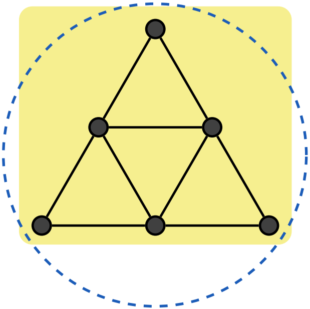
Alla grafer kan delas upp i *sammanhängande komponenter*.
Om grafen är sammanhängande blir det 1 komponent.

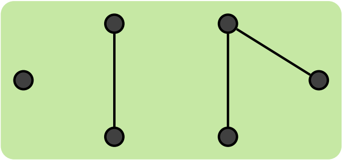




Sammanhängande komponenter

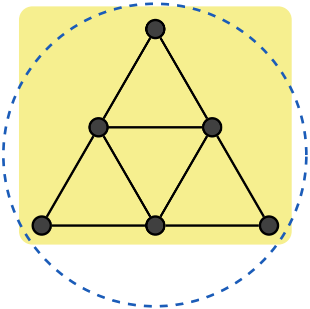
Alla grafer kan delas upp i *sammanhängande komponenter*.
Om grafen är sammanhängande blir det 1 komponent.

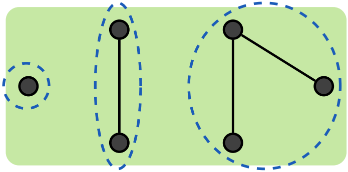




Sammanhängande komponenter

Alla grafer kan delas upp i *sammanhängande komponenter*.
Om grafen är sammanhängande blir det 1 komponent.





Sammanfattning – viktiga begrepp i Kapitel 2.1

- Graf, hörn, kanter
- Maximal och minimal grad
- Handskakningslemmat
- Stig, cykel, komplett graf
- Delgrafer
- Sammanhängande grafer

Kapitel 2.2 – Färgläggning av grafer

Definition 2.2.1 – färgläggning

Definition 2.2.1 – färgläggning

En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

Definition 2.2.1 – färgläggning

En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

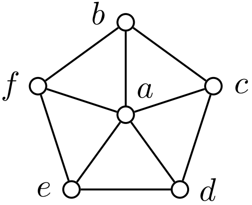
Grannar måste alltså ha olika färger!

Definition 2.2.1 – färgläggning

En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

Grannar måste alltså ha olika färger!

Exempel

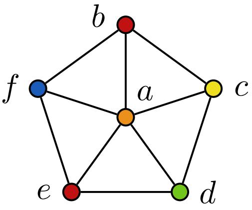


Definition 2.2.1 – färgläggning

En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

Grannar måste alltså ha olika färger!

Exempel



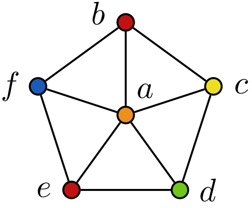
Färgläggning

Definition 2.2.1 – färgläggning

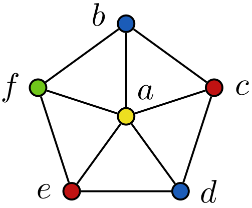
En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

Grannar måste alltså ha olika färger!

Exempel



Färgläggning



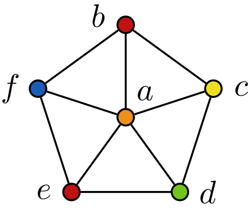
Färgläggning

Definition 2.2.1 – färgläggning

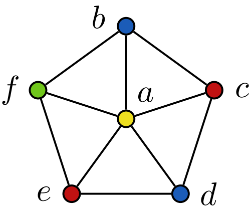
En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

Grannar måste alltså ha olika färger!

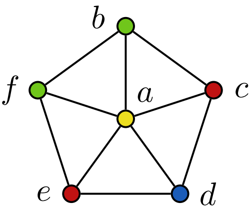
Exempel



Färgläggning



Färgläggning

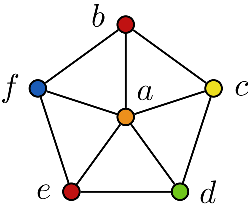


Definition 2.2.1 – färgläggning

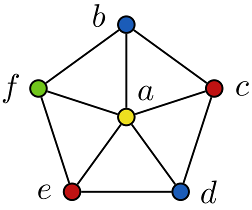
En *färgläggning* innebär att vi ger hörnen i en graf färger, så att inget hörn har samma färg som någon granne

Grannar måste alltså ha olika färger!

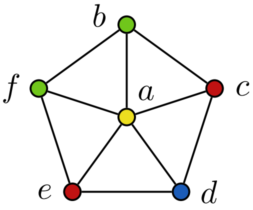
Exempel



Färgläggning



Färgläggning



Ingen färgläggning

Definition 2.2.4 – kromatiska talet

Definition 2.2.4 – kromatiska talet

Det minsta antalet färger som behövs för att färglägga G kallas det *kromatiska talet* $\chi(G)$

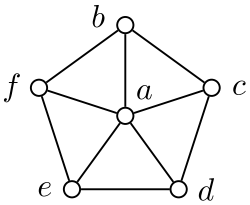
Definition 2.2.4 – kromatiska talet

Det minsta antalet färger som behövs för att färglägga G kallas det *kromatiska talet* $\chi(G)$

Definition 2.2.5 – optimal färgläggning

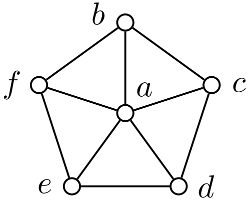
En färgläggning är *optimal* om den använder exakt $\chi(G)$ färger

Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

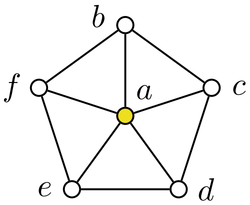
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

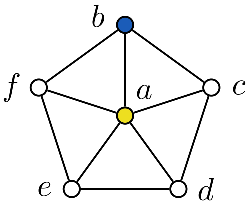
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

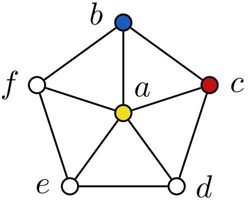
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

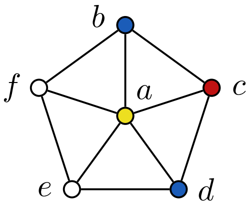
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

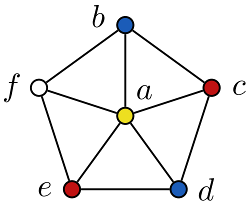
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

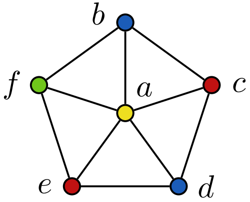
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

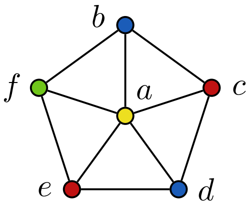
Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

Exempel

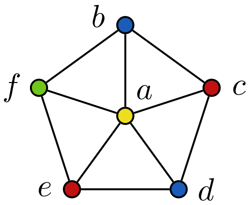


Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

$$\chi(G) =$$

Exempel



Vad är $\chi(G)$ för denna graf?

Vi provar att färglägga!

$$\chi(G) = 4$$

Uppskattningar av $\chi(G)$

Uppskattningar av $\chi(G)$

- $\chi(G) \leq |V|$ (Anmärkning 2.2.7)

Uppskattningar av $\chi(G)$

- $\chi(G) \leq |V|$ (Anmärkning 2.2.7)
- $\chi(G) \leq 4$ för planära grafer (Kapitel 4)

Uppskattningar av $\chi(G)$

- $\chi(G) \leq |V|$ (Anmärkning 2.2.7)
- $\chi(G) \leq 4$ för planära grafer (Kapitel 4)
- $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (Kapitel 5)

Uppskattningar av $\chi(G)$

- $\chi(G) \leq |V|$ (Anmärkning 2.2.7)
- $\chi(G) \leq 4$ för planära grafer (Kapitel 4)
- $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (Kapitel 5)
- $\chi(G) \leq \Delta(G)$ för sammanhängande grafer, förutom för kompletta grafer och udda cykler (Kapitel 6)

Sammanfattning – viktiga begrepp i Kapitel 2.2

- Färgläggning av graf
- Kromatiska talet, optimal färgläggning

Nästa föreläsning – Kapitel 3

- Planära grafer
- Färgläggning av kartor