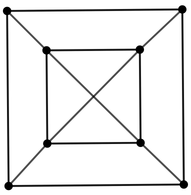
Lösningar till problem från Berkeley Math Circle 2008

8 mars 2019

4. Låt v vara ett hörn av den maximala graden Δ, i vår graf. Hörnet v har alltså Δ grannar. Om någon av dessa har grad Δ har vi alltså två hörn av samma grad. Låt i stället säga att alla v's grannar har grad lägre än Δ. Då har vi Δ hörn, och $\Delta - 1$ olika möjliga grader. Därför måste två av v's grannar ha samma grad.

5. Vi betraktar kartans granngraf. Varje provins har tre grannländer, vilket betyder att varje hörn i granngrafen har grad tre. Om det skulle finnas exakt 17 provinser skulle vi ha $17 \cdot 3 = 2|E|$ enligt Handskakningslemmat, där E står för kantmängden i granngrafen. Men $17 \cdot 3$ är ett udda tal, medans $2|E|$ är ett jämnt tal, så det kan inte stämma.

6. Här är ett exempel på en sådan graf.



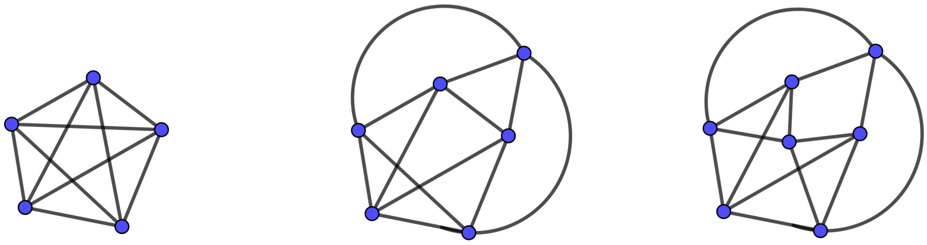
7. Vi gör ett induktionsbevis. Basfallet $n = 5$ bevisas av grafen K^5, vilken ju har fem hörn som alla har grad fyra. Vidare, antag att det existerar en graf G_n med n hörn som alla har grad fyra. Vi ska visa att det finns en 4-regulär graf med $n+1$ hörn genom att lägga till ett hörn till $G_n = (V_n, E_n)$. Låt oss kalla hörnen i V_n för $h_1, h_2, \ldots h_n$. Vi lägger till ett nytt hörn som vi kallar h_{n+1}. Välj sedan ut två kanter i $\{h_i, h_j\}, \{h_k, h_\ell\}$ i E_n, sådan att h_i, h_j, h_k, h_ℓ är fyra *olika* hörn (det är möjligt, eftersom det finns minst fem hörn, och alla har grad fyra). Vi bildar nu en ny kantmängd E_{n+1} genom att ta alla kanter från E_n förutom $\{h_i, h_j\}, \{h_k, h_\ell\}$, samt lägga till de fyra kanterna

$$\{h_{n+1}, h_i\}, \{h_{n+1}, h_j\}, \{h_{n+1}, h_k\}, \{h_{n+1}, h_\ell\}.$$

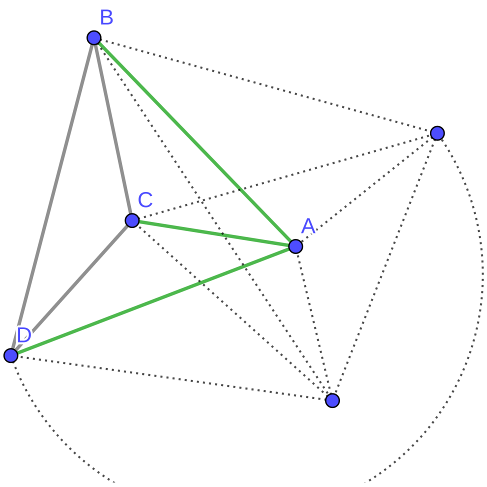
Tillsammans med hörnmängden

$$V_{n+1} = \{h_1, h_2, \ldots, h_n, h_{n+1}\}$$

har vi nu en ny graf $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$. Observera att hörnen h_i, h_j, h_k och h_ℓ har grad fyra även i G_{n+1}, eftersom vi tagit bort en kant, och lagt till en kant, vid vart och ett av dessa hörn. Även hörnet h_{n+1} har grad fyra, och övriga hörn har samma grad som de hade i G_n, d.v.s. fyra. Alltså är G_{n+1} en 4-regulär graf. I figuren nedan visas ett exempel på hur konstruktionen kan se ut, för $n = 5, 6, 7$.



8. För varje par av personer finns alltså två möjliga relationer: ”vänner” eller ”inte vänner”. Vi väljer ut en av de sex personerna, säg person A. Låt oss först anta att person A har minst tre vänner, som vi kallar B, C och D. För att göra problemet lite mer överskådligt illustrerar vi det med en graf, närmare bestämt grafen K^6. De sex personerna motsvarar hörn i grafen. Vi tänker oss också att vi färglägger kanterna i grafen på så sätt att en grön kant symboliserar att personerna är vänner, och en röd kant att de inte är vänner. (OBS: Det här handlar alltså inte om färgläggning av hörn, som vi annars är vana vid.) Att tre personer är vänner motsvarar en grön triangel i grafen, och att tre personer inte är vänner motsvarar en röd triangel. Vi vill visa att det finns antingen en grön, eller en röd, triangel i grafen. Enligt vårt antagande är kanterna $\{A, B\}, \{A, C\}$ och $\{A, D\}$ gröna. Om $\{B, C\}, \{B, D\}$ och $\{C, D\}$ bildar en röd triangel är vi klara. Annars är en av dessa kanter grön, säg $\{B, C\}$. Då bildar $\{A, B\}, \{A, C\}$ och $\{B, C\}$ en grön triangel.



Vi har nu visat att det finns en röd eller grön triangel, om A har tre vänner. Om A inte har tre vänner finns det i stället tre personer som A inte är vän med. Då kan vi upprepa samma resonemang, men med färgerna omväxlade.

9. För varje par av personer finns det nu tre möjliga relationer: ”vänner”, ”ovänner”, och ”har inte träffats tidigare”. Vi illustrerar situationen med en graf på samma sätt som i föregående uppgift, men nu med tre olika färger på kanterna: Grön för ”vänner”, röd för ”ovänner”, och gul för ”har inte träffats tidigare”. Vi vill visa att det alltid finns

en grön, gul, eller röd triangel i grafen K^{17}, om alla kanter färgläggs med någon av dessa tre färger. Låt oss börja med att välja ut ett hörn, som vi kan kalla A. Eftersom A har grad 16 måste det finnas minst sex kanter vid A som har samma färg (om det bara fanns fem kanter av varje färg blir det bara 15 kanter totalt). Låt säga att dessa sex kanter har färgen grön, och låt oss kalla de sex motsvarande hörnen (A's vänner) $h_1, h_2, \ldots, h_6$. Låt sedan G vara delgrafen som induceras av hörnen $h_1, h_2, \ldots, h_6$. Om det finns en grön kant $\{h_i, h_j\}$ i G är vi klara, eftersom vi då har en grön triangel med hörnen h_i, h_j och A. Antag i stället att det bara finns gula och röda kanter i G. Notera också att G i själva verket är grafen K^6. Vi vet därför från föregående uppgift att G innehåller en röd eller gul triangel.

10. Låt de 127 personerna vara hörn i en graf, och låt kantmängden vara de par av personer som spelat en match mot varandra i turneringen. Ett hörns grad är alltså antalet matcher som den personen spelat. Låt $u_1, u_2 \ldots, u_n$ vara de hörn som har udda grad, och $v_1, v_2, \ldots, v_{127-n}$ vara de hörn som har jämn grad. Enligt Handskakningslemmat är

$$d(u_1) + d(u_2) + \cdots + d(u_n) + d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_{127-n}) = 2k,$$

där k står för antalet kanter i grafen. Speciellt är summan ett jämnt tal. Dessutom är $d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_{127-n})$ ett jämnt tal, eftersom alla termerna är jämna. Då är även

$$d(u_1) + d(u_2) + \cdots + d(u_n) = 2k - (d(v_1) + d(v_2) + \cdots + d(v_{127-n}))$$

ett jämnt tal. Kom nu ihåg att summan av ett udda antal udda tal är udda, och att summan av ett jämnt antal udda tal är jämn. Det betyder att antalet hörn med udda grad måste vara jämnt. Översatt till det ursprungliga problemet har vi nu alltså visat att antalet personer som spelade ett udda antal matcher är jämnt. Det har ingen betydelse att det var just 127 spelare.

11. Vi tänker oss att vi har n punkter markerade på ett papper, som alltså föreställer hörnen i en graf. Vi ska nu rita ut så många kanter som möjligt i grafen, utan att den blir sammanhängande. En graf som inte är sammanhängande har två delgrafer, sådan att det inte finns någon kant som går mellan de två delgraferna. Låt oss först fixera antalet hörn i den ena delgrafen till m, där $1 \leq m \leq n-1$. Den andra delgrafen har då $n - m$ hörn. När vi nu ritar ut så många kanter det bara går, utan att sammanbinda de två delgraferna, får vi de två delgraferna K^m och K^{n-m}. Nu kan vi förstås räkna ut antalet kanter som vi ritat ut. Men i stället för att göra det räknar vi ut antalet kanter som vi *inte* ritat ut. En sådan "icke-kant" är alltså ett par av hörn, varav det ena ligger i delgrafen med m hörn, och det andra i delgrafen med $n-m$ hörn. Det finns precis $m(n-m)$ sådana par. För att göra antalet kanter i vår osammanhängande graf så stort som möjligt vill vi alltså välja m så att $m(n-m)$ blir så litet som möjligt. Det visar sig att vi ska välja $m = 1$, eller $m = n - 1$. (Hur kom vi fram till det? Vi kan se $m(n-m)$ som en funktion av m, och bestämma dess extrempunkter. Det visar sig då att minimum antas i intervallets ändpunkter $m = 1$ och $m = n-1$). Den graf som har störst antal kanter, och samtidigt är osammanhängande är alltså grafen som består av delgrafen K^{n-1} och ett isolerat hörn. En sådan graf har $(n-1)(n-2)/2$ kanter. För att garantera att grafen är sammanhängande måste den alltså ha $(n-1)(n-2)/2+1$ kanter.

12. Lite märklig fråga. Vem skulle bygga ett hus med rum som inte går att ta sig till? Hur som helt, problemet kan formuleras såhär. Vi definierar en graf där varje hörn i grafen motsvarar ett rum i huset. Två hörn är sammanbundna med en kant, om det finns en dörr mellan rummen. För att få med informationen att det bara finns en ingång till huset, låter vi även husets trädgård vara ett hörn i grafen. Detta hörn har alltså grad 1. Som vi konstaterade i uppgift 10 är antalet hörn med udda grad alltid jämnt. Alltså finns ett till hörn av udda grad, vilket motsvarar ett rum med ett udda antal dörrar (och en TV).

13. En graf kallas för en Hamiltongraf om den innehåller en Hamiltoncykel, alltså en cykel som går genom alla grafens hörn.

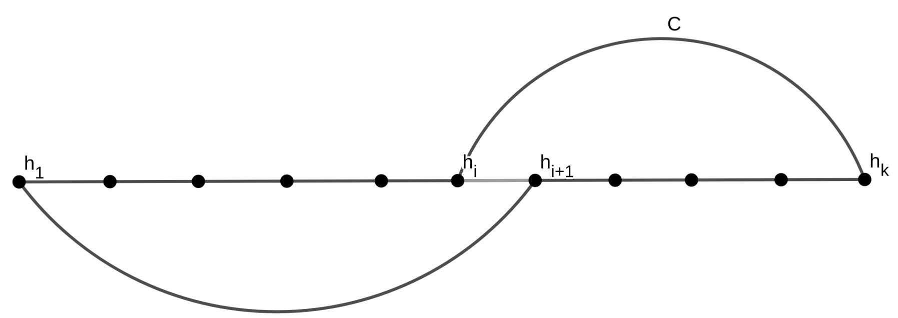
    Vi börjar med att observera att om $v = 1$ finns bara ett hörn, vilket har grad noll. Eftersom $0 < v/2 = 1/2$ behöver vi inte bevisa något.

    Vi går vidare till $v = 2$. Då existerar precis en graf där alla hörn har grad minst $v/2 = 1$, nämligen $G = (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$. Enligt vår vanliga definition av cykel finns ingen cykel i denna graf, så det är inte en Hamiltongraf. Men enligt Definition 6 i uppgiftsbladet är faktiskt följden $a, \{a, b\}, b, \{a, b\}, a$ (alltså att vi går från a till b, och sedan tillbaka igen) en cykel. Eftersom den går genom de båda hörnen är det en Hamiltoncykel.

    För cykler av längd minst tre överensstämmer vår definition med den i uppgiftsbladet.

    Antag nu att vi har en graf $G = (V, E)$ där $|V| = v \geq 3$, och varje hörn har grad minst $v/2$. Låt P vara en längsta stig som finns i G, och låt $h_1, h_2, \ldots, h_k$ vara hörnen i P. Eftersom varje hörn har grad minst $v/2$ har P längd minst $v/2$.
    Påstående: Det finns ett i så att $\{h_i, h_k\}, \{h_1, h_{i+1}\} \in E$
    Bevis av påståendet: Vi noterar först att både h_1 och h_k har alla sina grannar i P. Om h_1 eller h_k hade en granne utanför P hade vi ju kunnat göra stigen P längre, vilket skulle motsäga att P är den längsta stigen. Vi ska nu bevisa påståendet med ett motsägelsebevis. Antag alltså motsatsen, d. v. s. att för varje i sådant att $\{h_i, h_k\} \in E$ är $\{h_1, h_{i+1}\}$ *inte* en kant. Eftersom alla h_ks grannar ligger i P, och dessa är minst $v/2$ stycken, skulle detta ge oss minst $v/2$ hörn h_{i+1} som *inte* är grannar till h_1. Tillsammans med grannarna till h_1, och h_1 själv, skulle detta ge oss minst $v+1$ hörn. Detta är en motsägelse, eftersom det bara finns v hörn totalt i grafen. Därmed har vi bevisat påståendet.

    Det följer av påståendet att hörnen i P även är hörnen i en cykel C, se figur nedan.



    Det återstår att bevisa att C är en Hamiltoncykel. Med andra ord, vi vill bevisa att

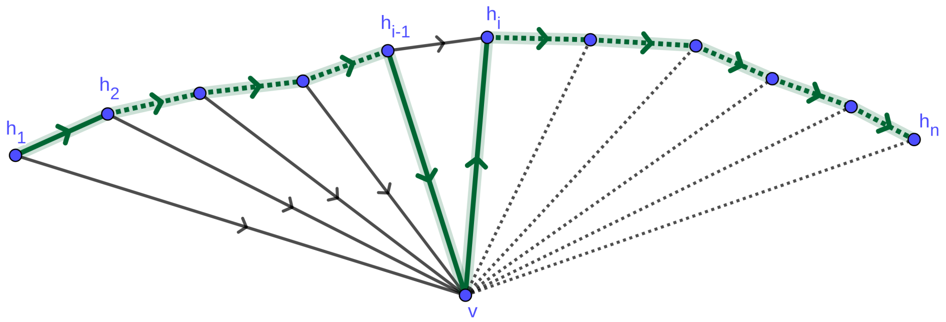
$h_1, h_2, \ldots, h_k$ är alla hörn i grafen. Vi konstaterade tidigare att $k \geq v/2 + 1$. Det kan alltså finnas högst $v/2 - 1$ andra hörn i grafen. Ett sådant hörn, säg w, skulle därför vara granne med något av hörnen $h_1, \ldots, h_k$. Men då skulle vi få en stig som börjar i w, och därefter följer cykeln C genom var och ett av hörnen $h_1, \ldots, h_k$. Men detta skulle motsäga att P är den längsta stigen. Det kan därför inte finnas några fler hörn i grafen.

14. Vi börjar med att bevisa att varje turnering (tournament) har en riktad Hamiltonstig. Detta bevisas med induktion över antalet hörn i grafen. I en graf med ett enda hörn finns en Hamiltonstig av längd 0, som alltså består av bara det enda hörnet. Vi går vidare till induktionssteget. Antag alltså att varje turnering med n hörn har en Hamiltonstig. Vi tar nu en godtycklig turnering G, med $n+1$ hörn, och vill bevisa att även denna har en Hamiltonstig. Kanterna i grafen är riktade, så vi inför beteckningen $a \to b$ för en kant som går från hörnet a till hörnet b. Låt oss nu välja ut ett hörn v i grafen, och låt H vara delgrafen som induceras av alla hörn förutom v. Även H en turnering. Eftersom H har n hörn innehåller den en Hamiltonstig, enligt induktionsantagandet. Vi kallar hörnen i H för $h_1, h_2, \ldots, h_n$, numrerade på ett sådant sätt att Hamiltonstigen är

$$h_1 \to h_2 \to \cdots \to h_n.$$

Vi vill nu använda denna stig för att visa att det finns en Hamiltonstig i G. Om $h_n \to v$ är en kant kan vi lägga till v sist i stigen. Om $v \to h_1$ är en kant kan vi lägga till v först i stigen. I annat fall, låt i vara det minsta tal för vilket $v \to h_i$ är en kant. Då får vi en Hamiltonstig

$$h_1 \to \cdots \to h_{i-1} \to v \to h_i \to \cdots \to h_n.$$



Att lista ut vilka turneringar som innehåller en riktad Hamiltoncykel är lite knepigare. Låt säga att vi har en riktad graf med en Hamiltoncykel i. För varje par av hörn u, v finns då en riktad stig som går från u till v, och en riktad stig från v till u. Dessa två stigar får vi alltså genom att gå längs Hamiltoncykeln. En riktad graf med just denna egenskap kallas för *starkt sammanhängande*. Alltså, en riktad graf är starkt sammanhängande om det för varje par av hörn finns stigar i vardera riktning, som sammanbinder hörnen. En turnering som innehåller en riktad Hamiltoncykel är alltså starkt sammanhängande. Vi ska nu bevisa att det även gäller omvänt, alltså att varje starkt sammanhängande turnering innehåller en riktad Hamiltoncykel. Beviset går ut på följande två steg.

1. Varje starkt sammanhängande turnering innehåller en riktad cykel.

2. Om den riktade cykeln inte går genom alla hörn kan den utvidgas.

Antag alltså att vi har en graf som är en starkt sammanhängande turnering. För att bevisa 1 väljer vi först ut två hörn, säg u och v. Eftersom grafen är starkt sammanhängande finns två stigar, en i vardera riktning, som sammanbinder u och v. Den ena stigen får vi direkt genom kanten mellan u och v, som vi kan säga är $u \to v$. Stigen från v till u innehåller förstås inte kanten $u \to v$, så stigen och kanten $u \to v$ bildar tillsammans en riktad cykel C. Låt oss kalla hörnen som ingår i C för $c_1, c_2, \ldots, c_m$, numrerade på så sätt att C ges av

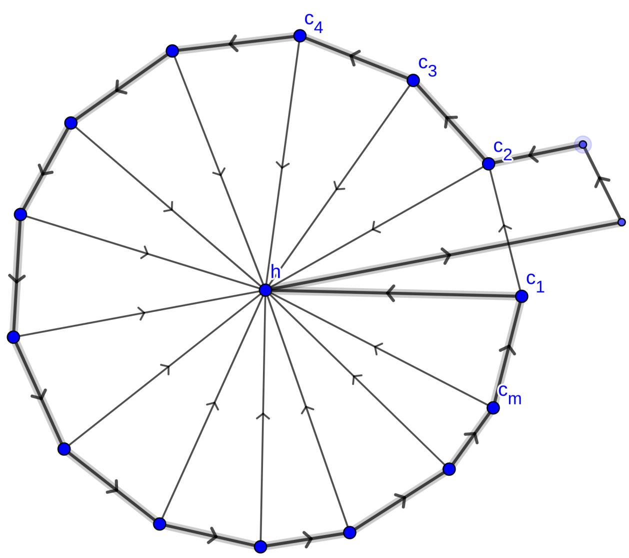
$$c_1 \to c_2 \to c_3 \to \ldots \to c_m \to c_1.$$

Vi går nu vidare till steg 2. Om detta är alla hörn i grafen är vi klara. Om inte, finns något hörn h som inte ingår i C. Vi ska nu visa att cykeln C kan utvidgas till en ny cykel som även går genom h. Vi delar in detta bevis i tre olika fall.

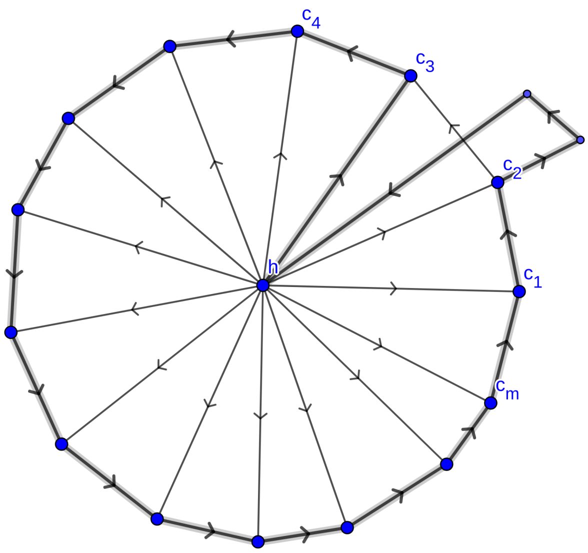
Fall A: För varje c_i är $c_i \to h$ en kant.
Eftersom grafen är starkt sammanhängande finns en stig S från h till c_1. Låt c_j vara det första hörn på cykeln C som stigen S passerar genom. (Om S inte passerar genom något annat hörn på C innan vi når fram till c_1 blir $j = 1$). Vi har alltså en stig S' från h till c_j som inte passerar genom någon annat hörn i C. Vi får då en cykel

$$h \to \ldots [\text{ stigen } S'] \cdots \to c_j \to \ldots [\text{ längs cykeln } C] \cdots \to c_{j-1} \to h.$$

Om $j = 1$ ska c_{j-1} tolkas som c_m ovan. Observera att denna cykel innehåller alla hörn från cykeln C, samt även h (och dessutom några fler hörn).



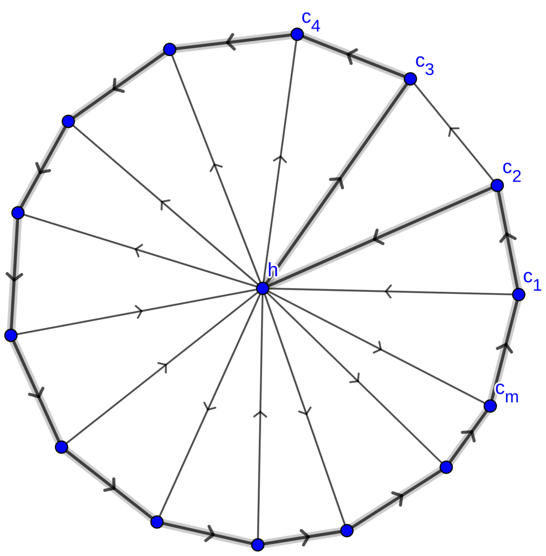
Fall B: För varje c_i är $c_i \leftarrow h$ en kant.
Enligt samma resonemang som i fall A kan vi hitta en stig från något hörn c_i till h, som inte passerar genom något annat hörn på cykeln C. Även detta ger upphov till en utvidgad cykel, på samma sätt som i fall A.



Fall C: Det finns en kant $c_i \to h$ och en kant $c_j \leftarrow h$.
Det följer att det finns ett k så att $h \to c_k$ är en kant, och $c_{k-1} \to h$ är en kant. Om $k = 1$ ska c_{k-1} tolkas som c_m. Då är

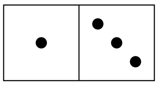
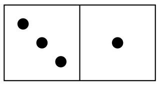
$$h \to c_k \to c_{k+1} \to \cdots [\text{ längs cykeln } C] \cdots \to c_{k-1} \to h,$$

en cykel som innehåller $c_1, \ldots, c_m$ och även h.

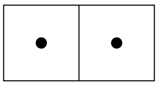
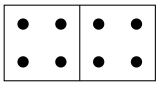


Vi är nu klara med steg 2. Poängen är alltså att kan börja med någon cykel, och utvidga denna stegvis tills det att vi får en Hamiltoncykel. Vi har nu bevisat att en turnering har en Hamiltoncykel om och endast om den är stark sammanhängande.

16. Vi börjar med att verifiera att det finns 28 olika möjliga dominobrickor. I princip finns det ju 7 möjliga värden (från 0 till 6 prickar) för varje ruta, vilket betyder att det finns $7 \cdot 7 = 49$ möjliga kombinationer. Men det spelar ju ingen roll vilken ruta vi räknar som höger och vilken vi räknar som vänster; till exempel är

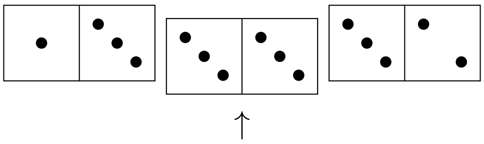
 och 

samma dominobricka (den är bara vriden 180° i ena fallet). I de 49 kombinationerna är alltså vissa brickor medräknade två gånger. Däremot är brickorna som har *samma* värde i båda rutorna, till exempel

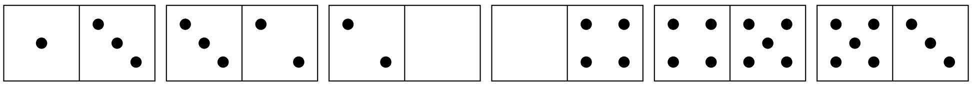
 och 

bara medräknade *en* gång. Det finns 7 brickor med samma värde i båda rutorna. De andra $49 - 7 = 42$ kombinationerna med *olika* värden i rutorna har räknats dubbelt, så det verkliga antalet brickor med olika värden i rutorna är $42/2 = 21$. Det totala antalet brickor är alltså $21 + 7 = 28$.

Nu ska vi svara på frågan i uppgiften. Vi kan bortse från de 7 brickor som har samma värde i båda rutorna, för de gör varken från eller till. Om det går att lägga alla brickor med *olika* värden i en cirkel så kan man nämligen peta in de 7 brickorna med samma värde i efterhand, så som visas nedan.



Betrakta de kvarvarande 21 brickorna med olika värden i de två rutorna. Låt varje värde från 0 till 6 vara ett hörn i en graf, och dra en kant mellan två hörn om det finns en bricka som har båda värdena. Eftersom vi har alla möjliga dominobrickor kommer det gå kanter mellan alla hörn, så grafen vi får är den kompletta grafen K^7. (Om du gjort Övning 2.4 i kompendiet så vet du att K^7 har 21 kanter, lika många som antalet dominobrickor.) Vi vill lägga de 21 brickorna i en cirkel så att närliggande brickors värden stämmer överens, så här:

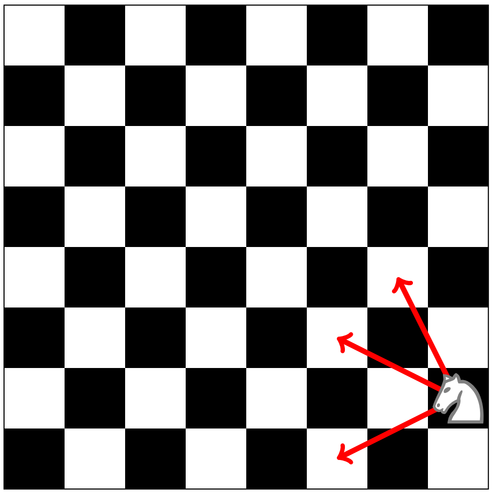
$\dots$  $\dots$

Varje dominobricka motsvarar en kant i grafen K^7, som tar oss från ett värde till ett annat. Detta innebär att vi vill hitta en Eulerkrets i grafen K^7, alltså en väg i grafen som passerar alla kanter precis en gång och slutar i samma hörn som den börjar. Enligt Sats 5 (b) i uppgiftsbladet har en graf en Eulerkrets om och endast om alla hörn i grafen har jämn grad. I grafen K^7 har alla hörn 6 grannar, så det finns en Eulerkrets. Det betyder att det är möjligt att lägga brickorna i en cirkel så som beskrivs i uppgiften.

17. (Detta problem påminner om det så kallade *springarproblemet* där frågan är om springaren kan besöka varje ruta på schackbrädet precis en gång, men här är frågan istället om springaren kan göra varje möjlig förflyttning mellan rutor precis en gång.)

    Vi inför en graf G där hörnmängden V består av de 64 rutorna på schackbrädet och två rutor $a, b \in V$ är sammankopplade med en kant om springaren kan gå från a till b i ett steg. Frågan i uppgiften är ekvivalent med att besvara om det finns en Eulerkrets i grafen G. (I det vanliga springarproblemet ska man istället hitta en Hamiltoncykel.)

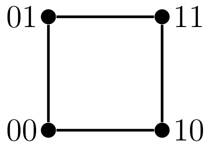
Enligt Sats 5 (b) i uppgiftsbladet finns det en Eulerkrets om och endast om alla hörn i grafen har jämn grad. Men som figuren nedan visar finns det positioner på schackbrädet där springaren bara har tre möjliga drag – detta hörn har alltså udda grad.



Därmed kan det inte finnas någon Eulerkrets i grafen.

20. Fallet då $n = 1$, alltså 2 hörn och 1 kant, behandlades i lösningsförslaget till uppgift 13. Vi antar därför här att $n \geq 2$, och bevisar påståendet med induktion över n.

Basfallet blir då $n = 2$, vilket är grafen nedan.



Den här grafen har förstås en Hamiltoncykel, till exempel $00 \to 10 \to 11 \to 01 \to 00$.

Antag nu att en n-kub har en Hamiltoncykel för något $n = d$. Vi ska visa att även $(d+1)$-kuben har en Hamiltoncykel. Låt B_d vara mängden av alla binära tal med d binära siffror, alltså hörnmängden till d-kuben. Att d-kuben har en Hamiltoncykel betyder att det finns en sekvens $b_1 \to b_2 \to \cdots \to b_{2^d} \to b_1$ som går igenom alla element $b_i \in B_d$ precis en gång (förutom b_1 som är både start- och sluthörn). Att gå från d-kuben till $(d+1)$-kuben innebär att vi lägger till en binär siffra. Elementen i B_{d+1}, vilka är hörnen i $(d+1)$-kuben, kan alltså beskrivas enligt

$$B_{d+1} = \{0b, 1b \,|\, b \in B_d\},$$

där $0b$ och $1b$ här betyder att vi lägger till en nolla eller etta i början av talet b (ska man vara petig borde man egentligen skriva $0 \cdot 2^d + b$ och $1 \cdot 2^d + b$ istället för $0b$ respektive $1b$). Vi kan se detta som att vi tar två stycken d-kuber och sätter ihop dem genom att för varje $b \in B_d$ lägga till en kant mellan $0b$ och $1b$ (som ju skiljer sig med exakt en siffra).

För att hitta en Hamiltoncykel i $(d+1)$-kuben börjar vi i hörnet $0b_1$ och följer sekvensen $0b_1 \to 0b_2 \to \cdots \to 0b_{2^d}$ som ju är den Hamiltoncykel vi hade i d-kuben. Istället för att sedan gå från $0b_{2^d}$ till $0b_1$ ska vi nu hoppa över till $1b_{2^d}$ i den ”andra” d-kuben, vilket ju går eftersom det finns en kant mellan $0b_{2^d}$ och $1b_{2^d}$. Samma Hamiltoncykel finns här, men nu följer vi den baklänges istället, alltså $1b_{2^d} \to 1b_{2^d-1} \to \cdots 1b_2 \to 1b_1$. Nu har vi först gått igenom alla hörn som börjar på 0 och därefter alla hörn som börjar på 1. Genom att nu hoppa tillbaka från $1b_1$ till $0b_1$ har vi avslutat Hamiltoncykeln i $(d+1)$-kuben.

22. Lösning hämtad från *Bay Area Mathematical Olympiad, 2004.*

Solution: The problem is equivalent, in general, to finding the least number of edges required so that a graph on n vertices will be connected, i.e., one can reach any vertex from any other vertex by following the edges of the graph. (We are letting settlements be vertices and tunnels be edges, of course).[1] This value is $\binom{n-1}{2} + 1$.

Here $\binom{m}{2}$ counts the number of all possible pairs in a group of m people, or equivalently, the number of edges in a graph with m vertices where every two vertices are connected with an edge. This latter graph is called a complete graph on m vertices.

To see that the minimum number of edges must be $\binom{n-1}{2} + 1$, we first observe that it cannot be less than this, since $n-1$ vertices can be connected to one another with $\binom{n-1}{2}$ edges, leaving the nth vertex isolated.

Next we will show that $\binom{n-1}{2} + 1$ edges will guarantee that the graph is connected.

Method 1: Suppose to the contrary, that the graph is not connected. Then it consists of k connected components, each containing $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vertices. Each component has at most $\binom{v_i}{2}$ edges. We claim that

$$\binom{v_1}{2} + \binom{v_2}{2} + \cdots + \binom{v_k}{2} \le \binom{n-1}{2},$$

which establishes the contradiction.

The above inequality an easy consequence of the two-term inequality

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} \le \binom{a+b-1}{2},$$

which can be established by considering a complete graph on a vertices (with $\binom{a}{2}$ edges) and a complete graph on b vertices (with $\binom{b}{2}$ edges, and then "gluing" them together on one vertex. This produces a new graph with $a+b-1$ vertices which must have at most $\binom{a+b-1}{2}$ edges.

Method 2: Since there are at most $\binom{n}{2}$ tunnels possible, there will be at most

$$\binom{n}{2} - \left(\binom{n-1}{2} + 1\right) = n-2$$

tunnels that are not drawn. Call these "antitunnels." Suppose to the contrary, that the graph is not connected. Then two settlements, A and B will not be connected. Thus, A and B are joined by an antitunnel. Furthermore, for each settlement X that is neither A nor B, there can be no path drawn from A to X and then from X to B. In other words, at least one of the connections AX or XB must be an antitunnel. However, this would require $n-2$ antitunnels, in addition to the antitunnel joining A and B. Thus $n-1$ antitunnels are needed, but at most $n-2$ are available; a contradiction.

23. Lösning hämtad från *Bay Area Mathematical Olympiad, 2005.*

Solution 1: Call a city "even" or "odd" according to whether the number of paved roads coming out of it is even or odd. Note the following.

> **Lemma:** *No matter which roads are paved, there will be an even (possibly zero) number of even cities.*

To see why this is true, let d_i be the number of paved roads leading out of city i. The sum

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{1000}$$

counts each paved road exactly twice, and hence will be an even number (this is known as the "Handshake Lemma"). If there were an odd number of even cities, then there would be an odd number of odd cities (since there are 1000 cities and 1000 is even). But then the sum above would be odd, a contradiction.

Using this lemma, we can create an algorithm which will eventually pave the roads so that all cities are odd.

1. Start by paving all the roads. If each city is odd, we are done.
2. Otherwise, find an even city x. By the lemma, there will be at least one other even city, y. Consider the path joining x and y. Change the "state" of all the roads in this path (in other words, if a road is paved, unpave it; if it is dirt, pave it). This procedure changes the parity of x and y (i.e., changes them from even to odd), but does not alter the parity of any other city in Euleria, because if z is a city on the path from x to y, both the road going into z (from the x-direction) and the road leaving it (heading towards y) will have changed.
3. Step 2 thus reduces the number of even cities by 2. Repeat this step as much as needed until the number of even cities is zero. ■

Solution 2: We will think of Euleria as a connected graph (a network of vertices joined by edges), where each city is a vertex and each dirt road joining two cities is an edge. Number the vertices $1, 2, \ldots, 1000$. For each $i = 1, 2, \ldots, 500$, consider any path from vertex $2i - 1$ to vertex $2i$ (we know such a path exists, since the graph is connected), and place a mark on each edge used in the path. Then pave all the

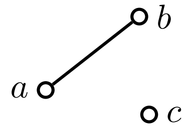
roads (edges) that have an odd number of marks. To show that this scheme meets the requirements, it is enough to prove that, for each vertex v, the edges incident to it have an odd total number of marks, since the number of such edges with an odd number of marks will then be odd. But consider all the occurrences of v in any of our 500 paths. Notice that v is an endpoint of one such path, which therefore contributes one mark on an edge incident to v; any other occurrence of v is internal to a path, which therefore contributes two marks, one on the edge leading into v and another on the edge leading out of it. It follows that the total number of marks on edges incident to v is odd. This completes the proof. ■

24. Vi ska visa att en graf som uppfyller $e > v^2/4$ måste innehålla en cykel av längd 3. Detta är samma sak som att visa att en graf som *inte* innehåller en cykel av längd 3 måste uppfylla $e \leq v^2/4$. Vi skriver fortsättningsvis "n-cykel" istället för "cykel av

längd n".

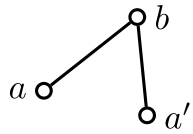
Låt G vara en graf med v hörn och e kanter som inte innehåller någon 3-cykel. Om $e = 0$ är $e \leq v^2/4$ förstås uppfyllt, så antag att $e > 0$. Vi ska nu beskriva en process som ökar antalet kanter i G utan att lägga till en 3-cykel. Det kommer visa sig att denna process leder till en speciall typ av graf som vi kan beräkna antalet kanter för.

Antag att det finns tre hörn a, b, c i G sådana att kanten $\{a, b\}$ finns i G men varken kanten $\{a, c\}$ eller $\{b, c\}$. Kom ihåg att $d(h)$ betecknar antalet grannar till hörnet h.



- Fall 1: $d(c) < d(a)$. Ta bort hörnet c och alla kanter kopplade till det. Inför istället en kopia a' av a som har samma grannar som a. Den nya grafen G' som fås har fortfarande ingen 3-cykel i sig, och den har fler kanter än G:

$$e' = e - d(c) + d(a) > e.$$



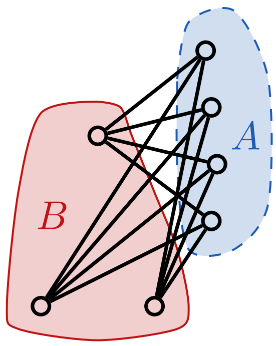
  (Observera att de nya hörnen a, b, a' inte längre uppfyller antagandet ovan.)

- Fall 2: $d(c) < d(b)$. Gör som i fall 1 fast kopiera b istället för a.
- Fall 3: $d(c) \geq d(a)$ och $d(c) \geq d(b)$. Ta bort både a och b. Inför istället två nya kopior c' och c'' av hörn c. Detta leder inte heller till någon 3-cykel. Den nya grafen G' får fortfarande fler kanter än G:

$$e' = e - (d(a) + d(b) \underbrace{-1}_{(\star)}) + 2d(c) \geq e + 1 > e,$$

  där den extra termen $(\star)$ kommer från att kanten mellan a och b annars skulle räknas två gånger. (De nya hörnen c, c', c'' uppfyller inte längre antagandet eftersom inga av dem har en kant mellan sig.)

Denna process kan fortsätta tills det inte längre finns några hörn a, b, c som uppfyller antagandet ovan. I det läget gäller alltså att om $\{a, b\}$ finns i grafen så finns alltid antingen $\{a, c\}$ eller $\{b, c\}$ (men inte båda förstås, för då skulle det vara en 3-cykel). Den enda typ av graf (förutom en graf helt utan kanter) som uppfyller detta är en komplett bipartit graf $K_{m,n}$ (bevis kommer i slutet), alltså en graf där hörnen kan delas upp i två grupper A och B, med m hörn i A och n hörn i B, där alla hörn i A är granne med alla hörn i B men inget hörn är granne med ett hörn i sin egen grupp. Som exempel visas grafen $K_{4,3}$ i figuren nedan.



Antalet kanter i $K_{m,n}$ är mn, och eftersom processen inte ändrar antalet hörn måste $m+n=v$, det vill säga $n=v-m$. Låt $f(m)$ vara antalet kanter i $K_{m,v-m}$:

$$f(m) = m(v-m) = mv - m^2.$$

Funktionen $f(m)$ är en parabel och har sitt maximala värde då $m = v/2$. Alltså

$$f(m) \leq f(v/2) = \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{v^2}{4}.$$

Eftersom processen ökade antalet kanter i G måste även

$$e \leq \frac{v^2}{4},$$

vilket skulle visas.

Här kommer ett bevis av att egenskapen ”för alla hörn a, b, c gäller att om kanten $\{a,b\}$ finns så finns antingen $\{a,c\}$ eller $\{b,c\}$ men inte båda” bara är uppfylld för kompletta bipartita grafer (och grafer helt utan kanter, men vi antog att $e > 0$). Vi kallar denna egenskap (♠).

Antag motsatsen, det vill säga att G uppfyller (♠) men inte är en komplett bipartit graf. Då är G antingen en bipartit graf som inte har alla möjliga kanter, eller så är G inte en bipartit graf alls. I det första fallet kan hörnen fortfarande delas upp i två grupper A och B, men det finns två hörn $x \in A$ och $y \in B$ sådana att kanten $\{x,y\}$ saknas. Vi delar upp i två delfall.

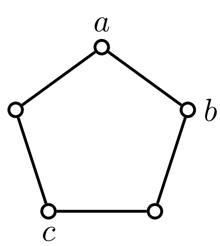
Fall 1: x eller y har andra kanter i grafen. Antag att x har en kant till $z \in B$. Men då finns $\{x,z\}$ i grafen fast varken $\{x,y\}$ eller $\{y,z\}$ finns, vilket motsäger (♠).

Fall 2: Varken x eller y har några kanter alls. Men vi antar att grafen har minst en kant, så det finns hörn $a \in A$ och $b \in B$ förbundna med en kant $\{a,b\}$. Men då finns $\{a,b\}$ i grafen fast varken $\{a,x\}$ eller $\{b,x\}$ finns, vilket också motsäger (♠).

Om G istället inte är bipartit finns enligt Sats 4 i uppgiftsbladet en udda cykel i G. Vi delar upp i två delfall här också.

Fall 1: Det finns en 3-cykel i G, med hörn a, b och c säg. Men då finns alla kanterna $\{a,b\}$, $\{b,c\}$ och $\{a,c\}$ i G, vilket motsäger (♠).

Fall 2: Det finns ingen 3-cykel i G. Då finns istället en udda cykel av längd minst 5. Välj a, b och c enligt figuren.



Eftersom ingen 3-cykel finns kan det inte finnas ytterligare kanter mellan hörnen som ingår i cykeln. Alltså finns kanten $\{a, b\}$ men varken $\{a, c\}$ eller $\{b, c\}$, vilket motsäger (♠).

Alla fall leder alltså till en motsägelse, förutom om G är en komplett bipartit graf. (Kontrollera själv att en komplett bipartit graf verkligen uppfyller (♠).)

25. Olikheten i uppgiften är kanske lite otydlig, eftersom v förekommer på två ställen, men betyder olika saker. Låt säga att vi har en graf $G = (V, E)$ med hörnmängd $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Då ska olikheten i uppgiften tolkas som

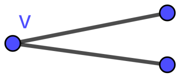
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d(v_i)}{2} > (m-1)\binom{n}{2}. \tag{1}$$

Både högerled och vänsterled innehåller *binomialkoefficienter*. Definitionen är

$$\binom{n}{k} = \text{Antalet delmängder av storlek } k \text{ av en mängd med totalt } n \text{ element.}$$

Grafen $K_{2,m}$ är en komplett bipartit graf. För en definition, se definition 10 i uppgiftsblandet, eller definition 7.1.2 i kompendiet. Att G har $K_{2,m}$ som delgraf kan också uttryckas som att det finns ett par av hörn i G som har m gemensamma grannar.

För vår graf $G = (V, E)$, låt N vara antalet förekomster av delgrafen $K_{1,2}$. Hur kan vi beräkna N? Vi kan tänka oss att vi går igenom alla hörn i grafen, och för varje hörn v räknar hur många hörnpar det finns som båda är grannar till v.



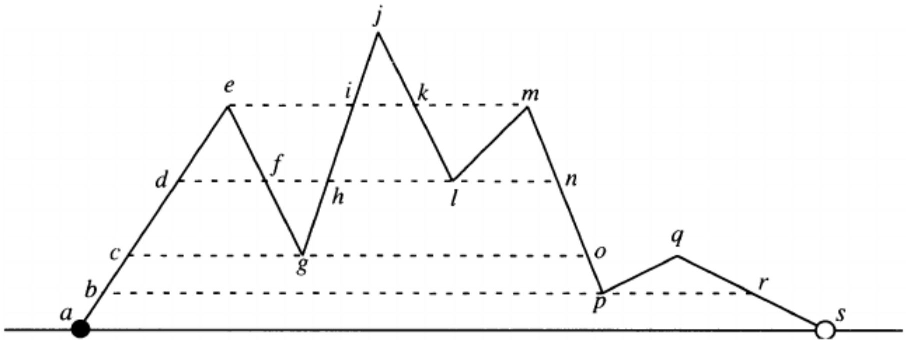
Detta tal är precis $\binom{d(v)}{2}$, så

$$N = \sum_{i=1}^{n} \binom{d(v_i)}{2} = \text{vänsterledet i (1)}.$$

Vi kan också tänka oss att vi går igenom alla möjliga hörnpar, och för varje hörnpar räknar hur många gemensamma grannar de har, och sedan summerar dessa tal. Det finns $\binom{n}{2}$ hörnpar att gå igenom. Om varje hörnpar har exakt $m-1$ genemsamma grannar blir $N = (m-1)\binom{n}{2}$. Om $N > (m-1)\binom{n}{2}$ vet vi därför att det finns ett hörnpar som har m (eller fler) gemensamma grannar. Vi har därmed bevisat att om olikheten (1) är uppfylld så är $K_{2,m}$ en delgraf till G.

27. Lösningen är kopierad ur Paul Zeitz bok *The art and craft of problem solving*, andra upplagan.

At first, it doesn't seem too hard. As long as it is legal to walk backward, it is pretty easy for the two men to stay at the same elevation. Let us label the "interesting" locations on the range (those with elevations equal to the peaks and troughs) with letters.



Then the black dot walks from a to c, while the white one goes from s to q. Next, the black dot walks backward from c to b while the white one goes from q to p, etc. It is pretty easy to write out the exact sequence of forward and backward steps to take.

But *why* does it work? And how can we guarantee that it will always work, even for really complicated mountain ranges (as long as the range does not have any valleys that drop below the starting elevation)? Before reading further, take some time to try to develop a *convincing* argument. It's not easy! Then you will enjoy our graph theory solution all the more.

Solution: As in the diagram above, label all the "interesting" locations. Let us call this set I, so in our example, $I = \{a, b, c, \ldots, s\}$. As the dots travel, we can keep track of their joint locations with an ordered pair of the form (x, y), where x indicates the black dot's location and y indicates the white dot's location. Using this notation, the progress of the two dots can be abbreviated as

$$(a,s) \rightarrow (c,q) \rightarrow (b,p) \rightarrow (e,m) \rightarrow (f,l) \rightarrow \cdots \rightarrow (s,a),$$

where the final configuration of (s, a) indicates that the two dots have switched places.

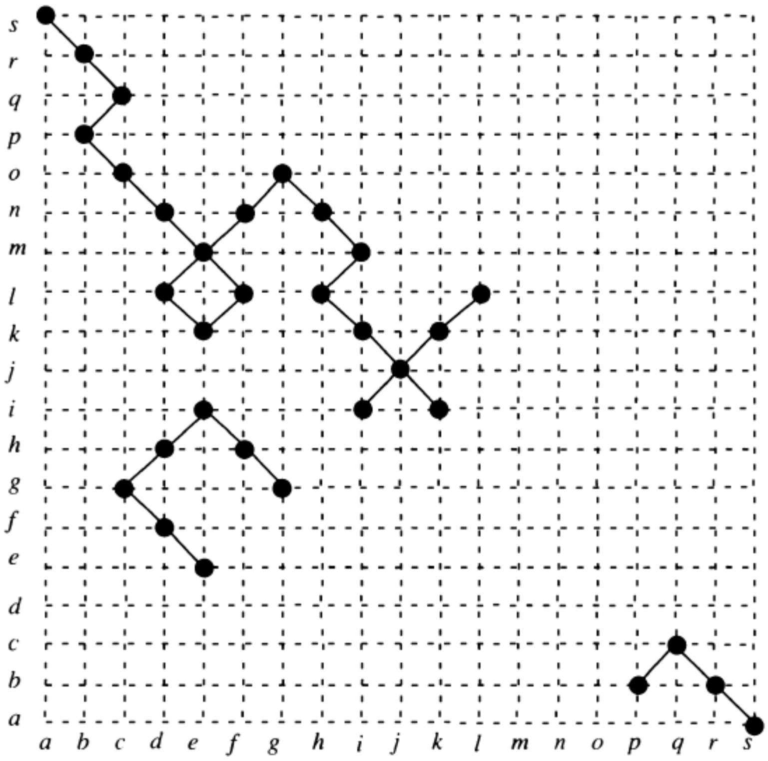
Now define a graph Γ whose vertices are all ordered pairs (x, y), where $x, y \in I$ and x and y are at the same elevation. In other words, the vertices of Γ consist of all possible legal configurations of where the two dots *could* be, although it may be that some of these configurations are impossible to reach from the starting locations. We shall join two vertices by an edge if it is possible to travel between the two configurations in one "step." In other words, the vertex (a, s) is not joined to (c, q), but we do join (a, s) to (b, r) and (b, r) to (c, q). Here is an incomplete picture of Γ, using a coordinate system [so the starting configuration (a, s) is at the upper-left corner]. This picture is missing many vertices [for example, $(a, a), (b, b), (c, c), \ldots$] and not all of the edges are drawn from the vertices that are pictured.

If we can show that there is a path from (a, s) to (s, a), we'd be done. [Actually, the path from (a, s) to (j, j) does the trick, since the graph is symmetrical.] Verify the following facts.

1. The only vertices of Γ with degree 1 are (a, s) and (s, a).
2. If a vertex is of the form (peak, peak), it has degree 4. For example, (e, m) has degree 4.
3. If a vertex is of the form (peak, slope), it has degree 2. An example is (e, i).
4. If a vertex is of the form (slope, slope), it has degree 2. An example is (d, n).

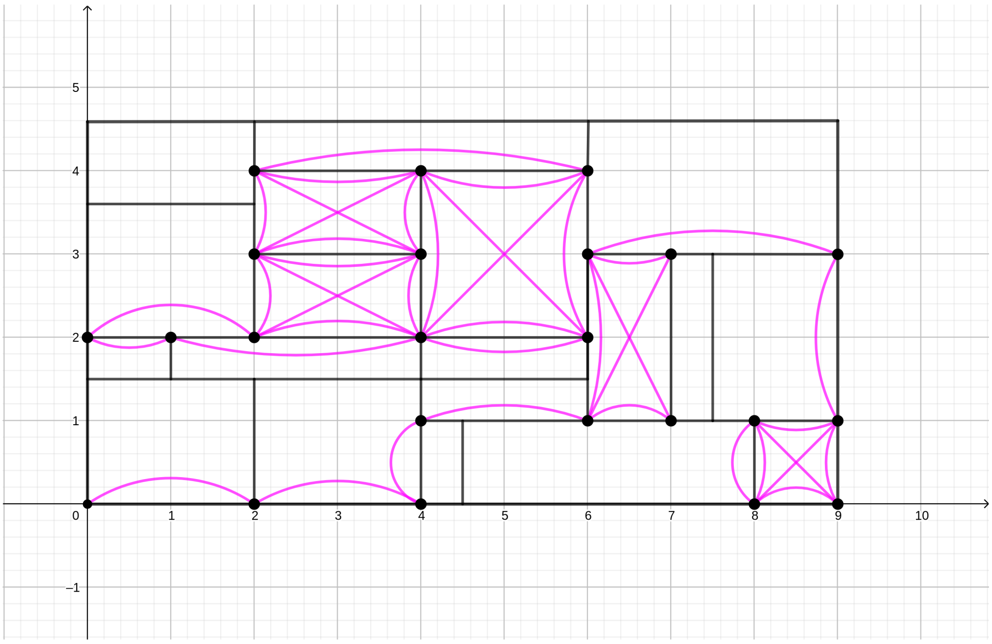
5. If a vertex is of the form (peak, trough), it is isolated (has degree zero). The vertex (g,q) is an example of this.

Now consider the connected component of Γ that contains the vertex (a,s). This is a subgraph of Γ [it is not all of Γ, since (g,q) and (q,g) are isolated]. By the handshake lemma (page 111), the sum of the degrees of the vertices of this subgraph must be even. Since the only two vertices with odd degree are (a,s) and (s,a), this subgraph *must* contain (s,a) as well. Thus there is a path from (a,s) to (s,a). This argument will certainly generalize to any mountain range, so we are done. ■



29. Uppgiften går alltså ut på att lägga ett "pussel" av rektanglar, så att de precis täcker en större rektangel. Var och en av de små rektanglarna har minst en sida av heltalslängd. Vi ska bevisa att även den stora rektangeln har en sida av heltalslängd.

    Vi tänker oss att vi placerar in den stora rektangeln i ett koordinatsystem, med ett av hörnen i origo, och sidorna parallella med koordinataxlarna. Vi markerar sedan alla punkter som är ett hörn i en liten rektangel, *och* har heltalskoordinater. Origo kommer alltså vara en av punkterna. Målet är att bevisa att ytterliggare en av den stora rektangelns hörn har heltalskoordinater. Vi låter de markerade punkterna vara hörn i en graf. Två hörn är grannar om de är hörn i samma lilla rektangel. Vi kommer nu frångå vår vanliga definition av graf något, och tillåta dubbla hanter. Två hörn bildar en dubbelkant om de båda är hörn i två rektanglar. Ett exempel på hur det kan se ut visas i figuren nedan.



Definiera *graden* av ett hörn som antalet kanter vid det hörnet. Observera att denna definition överersstämmer med vår vanliga definition av grad, om vi inte tillåter dubbelkanter. Poängen är alltså att en dubbelkant ska bidra med två till graden av ett hörn.

Notera nu följande fyra egenskaper.

1. För ett graf-hörn i en rektangel A finns ytterligare antingen ett eller tre graf-hörn som också är hörn i rektangeln A, eftersom A har en sida av heltalslängd.
2. Om ett hörn ligger inuti den stora rektangeln är detta hörn till två eller fyra små rektangar.
3. Ett hörn som ligger på randen av den stora rektangeln, men inte är ett hörn i den stora rektangeln, är ett hörn i två små rektanglar.
4. Den stora rektangelns hörn är hörn i precis en liten rektangel.

Ur 1 och 4 följer att de hörn som också är hörn i den stora rektangeln har udda grad, nämnligen grad 1 eller 3. Övriga hörn kommer att ha jämn grad, enligt 2 och 3. Vi konstaterade i uppgift 10 att det följer av Handskakningslemmat att det alltid finns ett jämnt antal hörn av udda grad. Här behöver vi stanna upp och fråga oss om Handskakningslemmat gäller även för grafer med dubbelkanter. Som tur är fungerar det, beviset är i princip likadant. Vi vet att origo är ett hörn av udda grad, och därför måste det finnas minst ett till hörn av udda grad. Ett sådant hörn måste vara ett hörn i den stora rektangeln. Då har den stora rektangeln alltså två hörn med heltalskoordinater, och det följer att en sida har heltalslängd.

1986 USAMO Problems/Problem 2

Problem

During a certain lecture, each of five mathematicians fell asleep exactly twice. For each pair of mathematicians, there was some moment when both were asleep simultaneously. Prove that, at some moment, three of them were sleeping simultaneously.

Solution

We shall assume to the contrary that there was never a time when three mathematicians were sleeping simultaneously, and derive a contradiction.

As a subtle but logically necessary note, we will assume without loss of generality that no two events (an event is one mathematician either falling asleep or waking up) happen at the same time.

> Rationale: Consider a group of events happening simultaneously--i.e., there is a moment before any of the events have happened, and there is a moment after all the events have happened, but there are no moments in which at least one but not all of the events have happened. If there is a valid timeline--i.e. one in which every pair of mathematicians was simultaneously asleep at some moment, but in which no three mathematicians are simultaneously asleep at any moment--containing a group of simultaneous events, then there is also a valid timeline in which that group of events is broken up into a sequence; you can construct the second timeline by putting the "mathematician wakes up" events first and the "mathematician falls asleep" events last. (In the first timeline, there were n mathematicians asleep in the moments immediately before the group of events, and m mathematicians asleep immediately afterwards; in the second timeline, there will be additional moments when n-1, n-2, ..., k, k+1, ..., m-1 mathematicians were asleep. If the first timeline is valid, then n and m are both less than 3, so the additional intermediate moments will not violate the "no 3 asleep at once" rule; and since we did not remove any moments, if the "all sleeping-pairs" rule was satisfied in the first timeline, then it is satisfied in the second timeline.) So the existence of any valid timeline implies the existence of a sequential valid timeline.

We have (5 choose 2) = 10 sleeping-pairs of mathematicians to account for. Also, since 5 mathematicians each fell asleep 2 times, we have a total of 10 occasions on which a mathematician fell asleep. Now, if two mathematicians are ever asleep simultaneously, then one of them fell asleep while the other was already asleep. However, because of the "no three asleep at once" rule, if a mathematician falls asleep, then at most one other mathematician could have been asleep already. Therefore, each occasion when a mathematician falls asleep can account for at *most* one sleeping-pair. It would appear that we have just enough to make it. However, when the first mathematician falls asleep, no other mathematicians are asleep...

Hey, wait a minute. Couldn't one mathematician, or even two, have been already asleep when the lecture started? In fact, the wording of the problem does not forbid this, and this permits us to construct an easy counterexample:

Call the mathematicians A,B,C,D,E. A starts out asleep. B sleeps; A wakes; C sleeps; B wakes; D sleeps; C wakes; E sleeps; D wakes; A sleeps; E wakes; then, C sleeps; A wakes; E sleeps; C wakes; B sleeps; E wakes; D sleeps; B wakes; A sleeps; D wakes. This creates, in order, the sleeping-pairs AB, BC, CD, DE, EA, then AC, CE, EB, BD, DA; each mathematician falls asleep and wakes up exactly twice, and at no time are three mathematicians asleep.

Well, this must be considered a hole in the problem as written. However, if we add the (nontrivial) assumption that the mathematicians were all awake when the lecture began, then it follows that the first occasion when a mathematician falls asleep can only account for zero sleeping-pairs, and the remaining 9 occasions can only account for 9 of 10 sleeping-pairs, and so there must be some pair of mathematicians that are not simultaneously asleep during the lecture. So our assumption to the contrary implies an impossible sequence of events. Therefore, that assumption must be wrong, and there must be a moment when three mathematicians are asleep.

See Also

1991 IMO Problems/Problem 4

Suppose G is a connected graph with k edges. Prove that it is possible to label the edges $1, 2, \ldots, k$ in such a way that at each vertex which belongs to two or more edges, the greatest common divisor of the integers labeling those edges is equal to 1.

Solution

We provide an algorithmic approach for labelling the edges: We start off with the set V of all vertices in G. For each step in the process we remove a number of vertices from the set V if their exists an edge sorrounding it which is labelled. Additionally, we shall use up the numbers $1, 2, ..., k$ in the order from least to greatest.

Here is the process: Let u be the least number not used yet. Take the longest path that uses any vertex once formed solely by vertices from V and call it path $P = (v_1, v_2, ..., v_n)$. If v_1 has more than one edge, then since P is maximal, it must be connected to some other edge v_0 which could be one of the vertices v_i or one of the vertices not in V. Similarly, if v_n has more than one edge, it must be connected to a vertex v_{n+1} which is either one of the v_i or one of the vertices not in V. Notice that since $v_1, v_n \in V$ the edge connecting v_0 and v_1 and the edge connecting v_n and v_{n+1} are not labelled. Now, if v_0 exists, we shall label the edge joining v_i and v_{i+1} with the number $u + i$. If v_0 does not exist then we shall label the edge joining v_i and v_{i+1} with the number $u + i - 1$.

If v_0 or v_{n+1} does not exist, then the vertex they should have been connected to has degree 1, and so the labels of the edges sorrounding it do not matter. Otherwise and the case of any other vertex in the path, our process garuntees that the vertex will be sorrounded by two edges labelled by 2 consecutive numbers. Thus, that vertex will be sorrounded by edges whose greates common factor is 1, no matter how the other edges sorrounding it are labelled. Notice that from our definition of V, the edges $v_1, v_2, ..., v_n$ are removed from V. Thus, it is clear that all vertices not in V, at any time, have edges sorrounding them that are relatively prime.

We repeat the process described until the only vertices in V are those which are not connected to any other vertices in V. Let the least number we have not yet used by u. If any of them are of degree 1, we do not care. If there is a vertex v of degree at least 2, then we simply label 2 of its edges u and $u + 1$ and now its edges are relatively prime, and we can remove it from V. Notice that this doesn't remove any other vertices from V since v is not connected to any vertices from V. We continue like this for the other vertices in V.

Now, all the vertices in V are those whose edges do not matter, while all vertices not in V are those with edges relatively prime. Thus we have the desired configuration, and we simply distribute the remaining numbers in any way we wish.

1989 USAMO Problems/Problem 2

Contents

Problem

The 20 members of a local tennis club have scheduled exactly 14 two-person games among themselves, with each member playing in at least one game. Prove that within this schedule there must be a set of 6 games with 12 distinct players

Solution

Solution 1

Consider a graph with 20 vertices and 14 edges. The sum of the degrees of the vertices is 28; by the Pigeonhole Principle at least 12 vertices have degrees of 1 and at most 8 vertices have degrees greater than 1. If we keep deleting edges of vertices with degree greater than 1 (a maximum of 8 such edges), then we are left with at least 6 edges, and all of the vertices have degree either 0 or 1. These 6 edges represent the 6 games with 12 distinct players.

Solution 2

Let a slot be a place we can put a member in a game, so there are two slots per game, and 28 slots total. We begin by filling exactly 20 slots each with a distinct member since each member must play at least one game. Let there be m games with both slots filled and n games with only one slot filled, so $2m + n = 20$. Since there are only 14 games, $m + n \leq 14 \implies 2m + n \leq 14 + m \iff 20 \leq 14 + m \implies m \geq 6$, so there must be at least 6 games with two distinct members each, and we must have our desired set of 6 games.

Solution 3

Assume the contrary.

Consider the largest set of disjoint edges E. By assumption it has less than 6 edges, i.e. maximum 10 vertices. Call it a vertex set V.

10 vertices remain outside V and each has to be attached to at least one edge. Now, if any two vertices outside V are connected by, say, edge e, we could have included e in E and gotten a larger disjoint set, so - a contradiction. Therefore the only option would be that all vertices outside V are connected each by one edge to some vertices inside V. That would take 10 edges, but E already includes 5 - again a contradiction.

All possibilities yield a contradiction, so our assumption can not be correct.

(Cases when largest set E is smaller than 6 are equivalent and weaker)

Solution to problem 21

Let's do the general case, by supposing, without loss of generality, that we are looking at the case $n = 6$. So we want to put $2^6 = 64$ 0s and 1's along a circle so that it will be possible to read any 6-digit binary numbers from 000000 to 111111 by looking at contiguous blocks of digits.

Make a graph with $32 = 2^5$ vertices, each vertex containing a different 5-digit binary number (ranging, thus, from 00000 to 11111). Join two vertices with a directed edge if the last 4 digits of one vertex agree with the first 4 digits of the other. For example, we would join vertex 10101 with an arrow pointing to 01011. This graph is a pseudograph, since there will be loops (we would join 00000 to itself) as well as double edges (we join 10101 with an arrow pointing to 01010, and we join 01010 with an arrow pointing to 10101).

To each of these edges, we assign the binary number whose first digit starts with the starting digit of the starting vertex, ending digit ends with the ending digit of the ending vertex, and middle four being the four digits "in common." That sounds confusing, but it's not: For example, the edge joining 10101 to 01011 indicates the number 101011. The loop joining 11111 to itself indicates the number 111111. The edge joining 10101 to 01010 indicates 101010, while the opposite edge joining 01010 to 10101 indicates the number 010101.

It is not too hard to check that each vertex of this pseudograph has degree 4 (loops count for 2 edges). For example, 00000 joins to itself (2 edges), and also to 00001. But also, 10000 is joined to 00000. So the total degree is 4. You should be able to check that every vertex has a total of 4 edges, either entering it, or leaving it.

Since each edge is counted twice (by each of its two endpoints), the total number of edges in the graph is $32 \times 4/2 = 64$, which makes sense. It should be clear that each of these edges corresponds to exactly one of the 64 6-digit binary digits. (If you are confused, try doing $n = 3$ on your own.)

Since the degrees are all even, there will be an Eulerian circuit (now ignore the fact that the edges have arrows), and by the nature of how the edges were defined, this will dictate how the 64 digits should be arranged. For example, start the circuit at 00000. Travel by the loop back to 00000, then go to 00001, then go from there to 00011. This means the first few digits of the circle will be 00000011, generating the 6-digit numbers 000000, 000001, 000011, etc. ■