Stockholms matematiska cirkel
Datorernas matematik

www.math-stockholm.se/cirkel

16.00–16.20: Fika
16.20–17.20: Föreläsning om kapitel 1.4 och 2
17.20–17.30: Rast
17.30–18.00: Gästföreläsning

KTH VETENSKAP OCH KONST

smc STOCKHOLMS MATEMATIKCENTRUM

STOCKHOLMS UNIVERSITET

Om Cirkeln

- 7 föreläsningar, 7 övningstillfällen
- Nästa övningstillfälle är om två veckor (24/10)
- Schema, program, kartor osv finns på hemsidan:

www.math-stockholm.se/cirkel

Datorernas matematik

1. (19 sep) Vad är matematik, egentligen?
2. **(10 okt) Hur kan en dator räkna?**
3. (7 nov) Tal med decimaler
4. (12 dec) Tärningen är kastad
5. (2020) Formella språk
6. (2020) Tillståndsmaskiner
7. (2020) Tillståndsmaskinernas språk

Kapitel 1.4 – Bevis

Vanliga bevistekniker

- Direkt bevis
- Motsägelsebevis
- Induktionsbevis
- (Indirekt bevis)

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Direkt bevis

Utgå direkt från definitionerna.

Sats: Om n är ett jämt tal så är $n+1$ ett udda tal.
Bevis: (tavla)

Motsägelsebevis

Antag motsatsen till det man vill bevisa, och visa att det är omöjligt.

Motsägelsebevis

Antag motsatsen till det man vill bevisa, och visa att det är omöjligt.

Sats: Talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. (Sats 1.4.4 i kompendiet)

Motsägelsebevis

Antag motsatsen till det man vill bevisa, och visa att det är omöjligt.

Sats: Talet $\sqrt{2}$ är irrationellt. (Sats 1.4.4 i kompendiet)
Bevis: Antag att $\sqrt{2}$ är en kvot av två positiva heltal, och bevisa att det leder till motsägelse.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje ickenegativt heltal n.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje ickenegativt heltal n.

- P_0: Talet 0 är udda eller jämnt.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje ickenegativt heltal n.

- P_0: Talet 0 är udda eller jämnt.
- P_1: Talet 1 är udda eller jämnt.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje ickenegativt heltal n.

- P_0: Talet 0 är udda eller jämnt.
- P_1: Talet 1 är udda eller jämnt.
- P_2: Talet 2 är udda eller jämnt.

Induktionsbevis

Påståendet

Alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje ickenegativt heltal n.

- P_0: Talet 0 är udda eller jämnt.
- P_1: Talet 1 är udda eller jämnt.
- P_2: Talet 2 är udda eller jämnt.
- osv...

Induktionsbevis

Påståendet

Alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

kan ses som en följd $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ av påståenden, ett för varje ickenegativt heltal n.

- P_0: Talet 0 är udda eller jämnt.
- P_1: Talet 1 är udda eller jämnt.
- P_2: Talet 2 är udda eller jämnt.
- osv...
- P_n: Talet n är udda eller jämnt.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.
Induktionssteg: Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ gäller för alla n.

För att bevisa satser på denna form kan man använda induktionsbevis. Dessa sker i två steg.

Basfall: Bevisa att P_0 gäller.
Induktionssteg: Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ gäller för alla n.

I vårt exempel blir det

- P_0: Talet 0 är udda eller jämnt.
- $P_n \implies P_{n+1}$: Om talet n är udda eller jämnt, så är talet $n+1$ udda eller jämnt.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.
- Induktionssteget är att om du står på ett trappsteg, så kan du gå till nästa.

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.
- Induktionssteget är att om du står på ett trappsteg, så kan du gå till nästa.

Man kan även tänka sig en kedja av implikationer:

$$P_0 \implies P_1 \implies \cdots \implies P_n \implies P_{n+1} \implies \cdots$$

Ett induktionsbevis är att gå upp för en trappa.

- Basfallet är att ta första steget.
- Induktionssteget är att om du står på ett trappsteg, så kan du gå till nästa.

Man kan även tänka sig en kedja av implikationer:

$$P_0 \implies P_1 \implies \cdots \implies P_n \implies P_{n+1} \implies \cdots$$

Basfallet är att visa att P_0 gäller, medan induktionssteget är att $P_n \implies P_{n+1}$ gäller för alla n.

Nu ska vi bevisa satsen

alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

Bevis:

Basfall: Talet 0 är udda eller jämnt.

Nu ska vi bevisa satsen

alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

Bevis:

Basfall: Talet 0 är udda eller jämnt.
Bevis: (tavla)

Nu ska vi bevisa satsen

alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

Bevis:

Basfall: Talet 0 är udda eller jämnt.
Bevis: (tavla)
Induktionssteg: Om talet n är udda eller jämnt, så är talet $n + 1$ udda eller jämnt.

Nu ska vi bevisa satsen

alla ickenegativa heltal är udda eller jämna.

Bevis:

Basfall: Talet 0 är udda eller jämnt.
Bevis: (tavla)
Induktionssteg: Om talet n är udda eller jämnt, så är talet $n+1$ udda eller jämnt.
Bevis: (tavla)

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.
- Bevisa P_0 med valfri bevismetod.

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.
- Bevisa P_0 med valfri bevismetod.
- Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ med valfri bevismetod.

Taktik:

- Identifiera P_0, P_1, P_2, osv.
- Bevisa P_0 med valfri bevismetod.
- Bevisa att $P_n \implies P_{n+1}$ med valfri bevismetod.

Tricket: I sista steget får man använda P_n, när man ska visa P_{n+1}.

Kapitel 2.1 – Osignerade heltal

Binära tal

Till vardags skriver vi tal i bas 10:

$$26 = 20 + 6 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Binära tal

Till vardags skriver vi tal i bas 10:

$$26 = 20 + 6 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Datorer använder bas 2:

$$11010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Binära tal

Till vardags skriver vi tal i bas 10:

$$26 = 20 + 6 = 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0.$$

Datorer använder bas 2:

$$11010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 2 = 26.$$

Ett tal som skrivs i bas 2 kallas *binärtal*. En siffra i ett binärtal är en *bit* (av engelskans *binary digit*).

Alla tal kan skrivas på båda sätten. Man kan också konvertera mellan dem.

Alla tal kan skrivas på båda sätten. Man kan också konvertera mellan dem.

Övning: Skriv 100101_2 i bas 10.
Lösning: (tavla)

Alla tal kan skrivas på båda sätten. Man kan också konvertera mellan dem.

Övning: Skriv 100101_2 i bas 10.
Lösning: (tavla)

Övning: Skriv 270 i bas 2.
Lösning: (tavla)

Binära tal kan adderas, precis som tal i bas 10. Man använder samma metod.

Övning: Addera binärtalen 11011_2 och 110011_2.
Lösning: (tavla)

Osignerade heltal

Datorer lagrar tal med ett bestämt antal bitar. Man kan tänka sig ett antal lådor som innehåller antingen innehåller 0 eller 1.

Osignerade heltal

Datorer lagrar tal med ett bestämt antal bitar. Man kan tänka sig ett antal lådor som innehåller antingen innehåller 0 eller 1.

0	0	1	1	0	1	0	0	$_2$
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	

Här lagras talet $00110100_2 = 110100_2 = 52$.

Osignerade heltal

Datorer lagrar tal med ett bestämt antal bitar. Man kan tänka sig ett antal lådor som innehåller antingen innehåller 0 eller 1.

0	0	1	1	0	1	0	0
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Här lagras talet $00110100_2 = 110100_2 = 52$.

I datorer motsvaras lådorna av kretsar, där spänningen är hög om talet är 1 och låg om talet är 0.

Ett heltal som lagras på detta sätt kallas för *osignerat heltal*. Om antalet lådor som används är N är det ett *N-bitars osignerat heltal*.

Ett heltal som lagras på detta sätt kallas för *osignerat heltal*. Om antalet lådor som används är N är det ett *N-bitars osignerat heltal*.

Ju fler bitar, desto större tal kan man lagra.

Sats: Ett N-bitars osignerat heltal kan lagra 2^N olika värden, nämligen

$$0, 1, \ldots, 2^N - 1.$$

Ett heltal som lagras på detta sätt kallas för *osignerat heltal*. Om antalet lådor som används är N är det ett *N-bitars osignerat heltal*.

Ju fler bitar, desto större tal kan man lagra.

Sats: Ett N-bitars osignerat heltal kan lagra 2^N olika värden, nämligen

$$0, 1, \ldots, 2^N - 1.$$

Bevis: (tavla)

Övning: Hur många tal kan ett 16-bitars osignerat heltal lagra?

Lösning: (tavla)

Övning: Hur många tal kan ett 16-bitars osignerat heltal lagra?

Lösning: (tavla)

Övning: Hur många bitar behövs för att lagra talet 16 i ett osignerat heltal?

Övning: Hur många tal kan ett 16-bitars osignerat heltal lagra?

Lösning: (tavla)

Övning: Hur många bitar behövs för att lagra talet 16 i ett osignerat heltal?

Lösning: (tavla)

Kapitel 2.2 – Kongruensräkning

Överflöde

Säg att talen $1011_2 = 11$ och $1100_2 = 12$ lagras i 4-bitars osignerade heltal. Vad händer när de adderas?

Överflöde

Säg att talen $1011_2 = 11$ och $1100_2 = 12$ lagras i 4-bitars osignerade heltal. Vad händer när de adderas?

$$
\begin{array}{rc|c|c|c|c|l}
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & _2 \\
+ & & 1 & 1 & 0 & 0 & _2 \\
\hline
= & \color{red}{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & _2 \\
 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 &
\end{array}
$$

Detta kallas för *överflöde* (overflow).

Överflöde kan lösas på olika sätt.

Överflöde kan lösas på olika sätt.

- Man lagrar resultatet i ett osignerat heltal med fler bitar.

Överflöde kan lösas på olika sätt.

- Man lagrar resultatet i ett osignerat heltal med fler bitar.
- Man lagrar det största/minsta värdet som går.

Överflöde kan lösas på olika sätt.

- Man lagrar resultatet i ett osignerat heltal med fler bitar.
- Man lagrar det största/minsta värdet som går.
- Man kastar bort allt “överflöd” och lagrar siffrorna längst till höger.

Överflöde kan lösas på olika sätt.

- Man lagrar resultatet i ett osignerat heltal med fler bitar.
- Man lagrar det största/minsta värdet som går.
- Man kastar bort allt “överflöd” och lagrar siffrorna längst till höger.

Det sista alternativet är det vanligaste leder oss till *kongruensräkning*.

Kongruensräkning

Definition: Säg att n är ett positivt heltal. Två heltal a och b är *kongruenta modulo n* ifall det finns ett heltal k så att

$$a = b + kn.$$

Kongruensräkning

Definition: Säg att n är ett positivt heltal. Två heltal a och b är *kongruenta modulo n* ifall det finns ett heltal k så att

$$a = b + kn.$$

Man kan också skriva

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Kongruensräkning

Definition: Säg att n är ett positivt heltal. Två heltal a och b är *kongruenta modulo n* ifall det finns ett heltal k så att

$$a = b + kn.$$

Man kan också skriva

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Intuition: a och b ger samma rest när man delar med n.

Exempel: Talen 3 och 15 är kongruenta modulo 12, eftersom

$$15 = 3 + 1 \cdot 12.$$

Exempel: Talen 3 och 15 är kongruenta modulo 12, eftersom

$$15 = 3 + 1 \cdot 12.$$

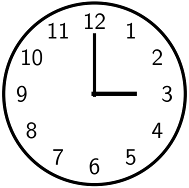
Exempel: Talen 4 och 7 är *inte* kongruenta modulo 5, eftersom

$$4 + 0 \cdot 5 = 4 \neq 7$$

och

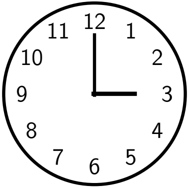
$$4 + 1 \cdot 5 = 9 \neq 7.$$

Exempel: En klocka räknar kongruenser.



Klockan 3 och 15 är olika tider på dagen, men motsvarar samma klockslag.

Exempel: En klocka räknar kongruenser.



Klockan 3 och 15 är olika tider på dagen, men motsvarar samma klockslag. Det förklaras genom att

$$3 \equiv 15 \pmod{12}.$$

Man kan använda kongruenser för att hantera överflöd.

$$
\begin{array}{rccccc}
 & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1}_2 \\
+ & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0}_2 \\
\hline
= & {\color{red}1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1}_2 \\
 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0
\end{array}
$$

Man kan använda kongruenser för att hantera överflöd.

$$
\begin{array}{rc|c|c|c|c|l}
 & & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & {}_2 \\
+ & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & {}_2 \\
\hline
= & \color{red}{1} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & {}_2 \\
 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 &
\end{array}
$$

Ifall man kastar bort överflödessiffran 1, får man 0111_2. I bas 10 motsvarar detta att

$$11 + 12 = 7.$$

I verkligheten är $11 + 12 = 23$, så datorn räknar fel. Anledningen är att den har för lite minne.

I verkligheten är $11 + 12 = 23$, så datorn räknar fel. Anledningen är att den har för lite minne.

Men notera att

$$7 + 1 \cdot 16 = 7 + 1 \cdot 2^4 = 23.$$

I verkligheten är $11 + 12 = 23$, så datorn räknar fel. Anledningen är att den har för lite minne.

Men notera att

$$7 + 1 \cdot 16 = 7 + 1 \cdot 2^4 = 23.$$

Alltså är $11 + 12 \equiv 7 \pmod{2^4}$. Datorn räknar alltså kongruenser.

Kapitel 2.3 – Additionsmaskin

Utelämnas på grund av tidsbrist.

Kapitel 2.4 – Signerade heltal

Signerade heltal

Osignerade heltal kan inte vara negativa. Därför använder man *signerade* heltal (efter engelskans *sign* = tecken). Det finns två varianter.

Signerade heltal

Osignerade heltal kan inte vara negativa. Därför använder man *signerade* heltal (efter engelskans *sign* = tecken). Det finns två varianter.

- Separat bittecken.

Signerade heltal

Osignerade heltal kan inte vara negativa. Därför använder man *signerade* heltal (efter engelskans *sign* = tecken). Det finns två varianter.

- Separat bittecken.
- Tvåkomplementsform.

Separat bittecken

I ett signerat heltal med separat bittecken avgör tecknet längst till vänster vilket tecken talet har.

1	0	1	1	0	1	0	0
T	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

(bas 2: 10110100_2)

Här lagras talet

$$-1 \cdot (2^5 + 2^4 + 2^2) = -(32 + 16 + 4) = -52$$

Ifall man använder separat bittecken så representerar de signerade heltalen

$$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}_2$$

$$\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}_2$$

samma tal, eftersom $0 = -0$. Inte så bra!

Ett annat problem är additionen. Om man skriver -4 och 2 med separat bittecken och adderar dem "som vanligt" får man

$$
\begin{array}{rcl}
 & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}_2 & = -4 \\
+ & \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}_2 & = 2 \\
\hline
= & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}_2 & = -6
\end{array}
$$

Ett annat problem är additionen. Om man skriver -4 och 2 med separat bittecken och adderar dem "som vanligt" får man

$$
\begin{array}{rcl}
 & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}_2 & = -4 \\
+ & \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}_2 & = \;\;2 \\
\hline
= & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}_2 & = -6
\end{array}
$$

Addition av signerade heltal med separat bittecken kräver alltså en egen elektrisk krets.

Tvåkomplementsform

Ett N-bitars signerat heltal på tvåkomplementsform använder också en separat teckenbit längst till vänster, men på ett annat sätt.

- Om teckenbiten är 0 representerar det signerade heltalet samma som ett osignerat.

Tvåkomplementsform

Ett N-bitars signerat heltal på tvåkomplementsform använder också en separat teckenbit längst till vänster, men på ett annat sätt.

- Om teckenbiten är 0 representerar det signerade heltalet samma som ett osignerat. **Exempel**: 0110_2 motsvarar $2 + 4 = 6$.

Tvåkomplementsform

Ett N-bitars signerat heltal på tvåkomplementsform använder också en separat teckenbit längst till vänster, men på ett annat sätt.

- Om teckenbiten är 0 representerar det signerade heltalet samma som ett osignerat. **Exempel**: 0110_2 motsvarar $2 + 4 = 6$.
- Om teckenbiten är 1 representerar det talet det negativa talet $x - 2^N$, där x är heltalet som motsvarar de $N - 1$ högra bitarna.

Tvåkomplementsform

Ett N-bitars signerat heltal på tvåkomplementsform använder också en separat teckenbit längst till vänster, men på ett annat sätt.

- Om teckenbiten är 0 representerar det signerade heltalet samma som ett osignerat. **Exempel**: 0110_2 motsvarar $2 + 4 = 6$.
- Om teckenbiten är 1 representerar det talet det negativa talet $x - 2^N$, där x är heltalet som motsvarar de $N - 1$ högra bitarna. **Exempel**: 1011_2 motsvarar $3 - 2^3 = -5$.

Övning: Vilket tal motsvarar tvåkomplementsformerna 11011_2 och 0101010_2?

Lösning: (tavla)

Övning: Vilket tal motsvarar tvåkomplementsformerna 11011_2 och 0101010_2?

Lösning: (tavla)

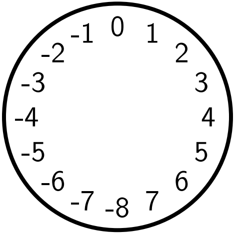
Övning: Skriv -7 och 6 på tvåkomplementsform. Använd så få bitar som möjligt.

Lösning: (tavla)

Bitar	Osignerat	Signerat (bittecken)	Tvåkomplementsform
0000_2	0	0	0
0001_2	1	1	1
0010_2	2	2	2
0011_2	3	3	3
0100_2	4	4	4
0101_2	5	5	5
0110_2	6	6	6
0111_2	7	7	7
1000_2	8	-0	-8
1001_2	9	-1	-7
1010_2	10	-2	-6
1011_2	11	-3	-5
1100_2	12	-4	-4
1101_2	13	-5	-3
1110_2	14	-6	-2
1111_2	15	-7	-1

Olika sätt att tolka fyra bitar som heltal.

Tvåkomplementsform kan illustreras i en klocka.



Signerade tal på tvåkomplementsform kan adderas som vanligt.

Signerade tal på tvåkomplementsform kan adderas som vanligt.

$$
\begin{array}{rcl}
 & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}_2 & = -4 \\
+ & \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}_2 & = 2 \\
\hline
= & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}_2 & = -2
\end{array}
$$

Addition med tal på tvåkomplementsform kan dock bete sig underligt ibland.

$$
\begin{array}{rl}
 & \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}_2 \quad = 3 \\
+ & \boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}_2 \quad = 6 \\
\hline
= & \boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}_2 \quad = -7
\end{array}
$$

Addition med tal på tvåkomplementsform kan dock bete sig underligt ibland.

$$
\begin{array}{rl}
 & \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}_2 \quad = 3 \\
+ & \boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}_2 \quad = 6 \\
\hline
= & \boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}_2 \quad = -7
\end{array}
$$

Detta är fel. Men vi noterar att $3 + 6 = 9 = -7 + 16$, så att

$$9 \equiv -7 \pmod{2^4}.$$

Addition med tal på tvåkomplementsform kan dock bete sig underligt ibland.

$$\begin{array}{cc}
 & \boxed{0\,|\,0\,|\,1\,|\,1}_2 \quad = 3 \\
+ & \boxed{0\,|\,1\,|\,1\,|\,0}_2 \quad = 6 \\
\hline
= & \boxed{1\,|\,0\,|\,0\,|\,1}_2 \quad = -7
\end{array}$$

Detta är fel. Men vi noterar att $3 + 6 = 9 = -7 + 16$, så att

$$9 \equiv -7 \pmod{2^4}.$$

Detta kan betraktas som en speciell form av överflöde.

Överflöde och tvåkomplementsform

Vad händer ifall det blir överflöde?

$$
\begin{array}{rr@{\;}l}
 & \boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}_2 & = -5 \\
+ & \boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}_2 & = -4 \\
\hline
= & 1\,\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}_2 & = 7
\end{array}
$$

Detta är fel, men vi noterar att $7 = -9 + 16$, så att

$$7 \equiv -9 \pmod{16}.$$

Osignerade heltal och tal på tvåkomplementsform lagras och adderas på samma sätt, och man får alltid tal som är kongruenta modulo 2^N (där N är antalet bitar).

Osignerade heltal och tal på tvåkomplementsform lagras och adderas på samma sätt, och man får alltid tal som är kongruenta modulo 2^N (där N är antalet bitar). *Man kan därför använda samma elektriska krets för båda heltalstyperna.*

Osignerade heltal och tal på tvåkomplementsform lagras och adderas på samma sätt, och man får alltid tal som är kongruenta modulo 2^N (där N är antalet bitar). *Man kan därför använda samma elektriska krets för båda heltalstyperna.*

Det gör våra datorer billigare och mer effektiva.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (24/10). Det är ett övningstillfälle.

Nästa tillfälle

Nästa gång är om två veckor (24/10). Det är ett övningstillfälle.

Nästa föreläsning är om fyra veckor (7/11). Då kommer Joar prata om hur man lagrar bråktal i datorer.